A. BUHL

Sur les volumes tournants

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 324-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__324_0>

[$O^1 5a$]

SUR LES VOLUMES TOURNANTS;

Par A. BUHL.

1. Ceci est la suite de l'article précédemment publié *Sur la Géométrie de la formule de Stokes*.

Les travaux fondamentaux sur le sujet sont toujours ceux de M. G. Kœnigs qui, pour un contour fermé C donné, a considéré le complexe formé par les axes auxquels correspondent des volumes tournants équivalents. C'est dans un ordre d'idées analogue que je considère les familles de surfaces portant des C qui, avec *deux* axes de rotation donnés D et D', engendrent des volumes tournants équivalents ou en rapport constant.

L'étude est intéressante, d'abord parce qu'elle livre quelques aperçus probablement nouveaux sur les hélicoïdes et les surfaces de révolution, ensuite et surtout, parce qu'elle conduit à un système d'équations différentielles qui est de ceux qui sont *identiques à leur système adjoint* (ou du moins qui se ramène facilement à ce type après avoir fait abstraction des termes purement constants). On sait que ces systèmes ont été particulièrement étudiés; on pourra se reporter aux *Surfaces* de Gaston Darboux (t. I, 2e édition, Ch. II) et au *Cours d'Analyse* de M. Édouard Goursat (t. II, 2e édition, p. 482) encore que le système envisagé plus loin soit fort simple et puisse être intégré par des considérations des plus élémentaires.

Les systèmes différentiels identiques à leur adjoint ont d'ailleurs actuellement un regain d'actualité qui leur vient de la théorie du déplacement parallèle généralisé de M. T. Levi-Civita (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1917, p. 173). Au fond ce n'est pas une coïncidence fortuite qui lie ce grand sujet avec les lignes élémentaires qui suivent; il y a, dans les deux cas, une invariance stokienne concernant une intégrale double, mais ici, je laisse de côté de tels points de vue pour lesquels je renverrai à mes Mémoires *Sur l'Électromagnétisme et la Gravifique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, années 1921 et suivantes).

2. *Équation aux derivées partielles des surfaces* S *sur lesquelles on peut tracer un contour fermé* C *donnant, quant à deux axes de rotation* D *et* D' *quelconques, deux volumes tournants de rapport constant.* — Reprenons l'expression générale du volume tournant dû à une cloison S :

$$\text{(1)} \qquad V = 2\pi \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} d\sigma.$$

Cette expression est celle de l'article précédent et de mon opuscule *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* (p. 25). Ici l'axe de rotation passe par le point (a, b, c) et a pour cosinus directeurs λ, μ, ν. Dans ces conditions, on peut écrire immédiatement, pour définir les surfaces S, l'équation

$$\text{(2)}\, m \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ x-a' & y-b' & z-c' \end{vmatrix}.$$

Les axes de rotation sont évidemment

D passant par (a, b, c) avec les cosinus directeurs λ, μ, ν,
D' » (a', b', c') » λ', μ', ν'.

Ils sont quelconques mais, pour éviter toute difficulté, on supposera n'étudier que des contours C non traversés par D ou D'. Dans (2), m et n sont des facteurs de proportionnalité constants. Manifestement (2) est une équation aux dérivées partielles linéaire et homogène, du premier ordre, puisque α, β, γ peuvent y être remplacés par les coefficients directeurs de la normale à S.

L'étude de (2), en lui laissant la forme absolument symétrique qui vient d'être indiquée, ne serait sans doute pas sans intérêt. Ici nous prendrons des coordonnées telles que D et D' aient les équations :

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} x = a, \\ z = y.\operatorname{tang}\omega, \end{cases}$$

$$(\mathrm{D}') \qquad \begin{cases} x = -a, \\ z = -y.\operatorname{tang}\omega. \end{cases}$$

Les axes de rotation D et D' ne cessent point ainsi d'être quelconques l'un par rapport à l'autre, mais leur perpendiculaire commune est prise pour axe Ox cependant que leurs projections sur Oyz admettent Oy et Oz pour bissectrices.

Pour fixer les idées, on peut imaginer que l'angle ω est aigu. Nous le ferons tendre vers l'angle droit au paragraphe 4.

Alors l'équation (2) devient

$$(3)\ m\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ x-a & y & z \end{vmatrix} = n\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -\cos\omega & \sin\omega \\ x+a & y & z \end{vmatrix}.$$

Posons

$$m+n=\mu, \qquad m-n=\nu;$$

il est à peine besoin de dire que c'est là une notation nouvelle en laquelle μ et ν n'ont aucun rapport avec les cosinus λ, μ, ν, de (1) ou (2), qui ne reparaîtront pas explicitement dans la suite. Ainsi (3) peut s'écrire

$$(4)\quad \alpha\begin{vmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ \nu y & \mu z\end{vmatrix} - \beta\sin\omega\begin{vmatrix}\mu & \nu\\ x & a\end{vmatrix} - \gamma\cos\omega\begin{vmatrix}\mu & \nu\\ a & x\end{vmatrix} = 0,$$

et, en posant

$$y = \eta\sin\omega,\qquad z = \zeta\cos\omega,$$

le système différentiel ordinaire, à considérer pour intégrer (4), est

$$(5)\quad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = \mu\cos^2\omega.\zeta - \nu\sin^2\omega.\eta,\\[2mm] \dfrac{d\eta}{dt} = \nu x - \mu a,\\[2mm] \dfrac{d\zeta}{dt} = -\mu x + \nu a.\end{cases}$$

C'est ce système (5) qui, en variables x, y, z et abstraction faite des termes νa et $-\mu a$, est identique à son adjoint. Des calculs très simples donnent pour son intégrale générale

$$(6)\quad \begin{cases}x = \mathrm{A}\cos kt + \dfrac{a\mu\nu}{k^2},\\[2mm] \eta = \mathrm{A}\dfrac{\nu}{k}\sin kt + \mu\left(\dfrac{\nu^2}{k^2} - 1\right)at + \mathrm{B},\\[2mm] \zeta = -\mathrm{A}\dfrac{\mu}{k}\sin kt - \nu\left(\dfrac{\mu^2}{k^2} - 1\right)at + \mathrm{C},\end{cases}$$

avec

$$(7)\quad \begin{cases}k^2 = \mu^2\cos^2\omega + \nu^2\sin^2\omega,\\ \mathrm{B}\nu\sin^2\omega = \mathrm{C}\mu\cos^2\omega.\end{cases}$$

Les constantes arbitraires A, B, C se réduisent à deux d'après la seconde équation (7); il pourrait bien y en avoir une troisième accompagnant t de manière purement additive mais elle disparaîtrait en même temps que t, variable auxiliaire destinée à l'élimination. Ainsi le problème général ici posé peut être considéré comme résolu et de façon fort élémentaire, mais il reste à en étudier bien des particularités géométriques intéressantes.

3. *Surfaces* S *portant des contours* C *donnant, quant à* D *et* D′, *des volumes tournants équivalents.* — Traitons directement cette question ([1]). Avec

$$m = 1, \quad n = -1, \qquad \text{d'où} \qquad \mu = 0, \quad \nu = 2,$$

l'équation (3) devient

$$\alpha y - \beta x - \gamma . a \operatorname{cotang} \omega = 0.$$

En coordonnées semi-polaires, on a les surfaces intégrales

$$z = \frac{a}{\operatorname{tang} \omega} \theta + \varphi(r). \tag{8}$$

Ce sont des *hélicoïdes*.

Le même résultat est facile à tirer des équations (6) et (7) qui donnent

$$x = \mathrm{A} \cos kt, \quad k\eta = 2\,\mathrm{A} \sin kt, \quad \zeta = 2at + \mathrm{C}, \quad k = 2 \sin \omega$$

Les droites D et D′ étant génératrices d'un même système sur l'hyperboloïde de révolution

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\operatorname{tang}^2 \omega} = a^2, \tag{9}$$

on peut énoncer ce théorème :

Si un contour fermé, tracé sur l'hélicoïde (8),

([1]) Proposée au Certificat de calcul différentiel et intégral, à Toulouse, en juillet 1923. On voit que le problème est susceptible de conduire à d'autres plus généraux et dont le niveau atteindrait vite celui de l'Agrégation.

tourne dans l'espace autour de deux génératrices d'un même système, passant en deux points diamétralement opposés du cercle de gorge de l'hyperboloïde (9), *les deux volumes tournants sont équivalents.*

Si l'on avait pris $m = n$ on aurait trouvé un hélicoïde analogue à (8) mais ayant Oy pour axe.

4. *Cas de l'angle* ω *droit,* m *et* n *étant quelconques.* — Ici l'équation (3) est

$$m\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x-a & y \end{vmatrix} = n\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x+a & y \end{vmatrix}$$

ou

$$\alpha\nu y - \beta(\nu x - \mu a) = 0.$$

Le système différentiel

$$\frac{dx}{\nu y} = \frac{dy}{\mu a - \nu x} = \frac{dz}{0}$$

donne les surfaces intégrales

$$(10) \qquad \left(x - a\frac{\mu}{\nu}\right)^2 + y^2 = \varphi(z).$$

Ce résultat peut encore se déduire très aisément des formules générales (6) et (7). On a

$$k = \nu, \qquad B = 0, \qquad x = A\cos\nu t + a\frac{\mu}{\nu}, \qquad y = A\sin\nu t,$$

d'où l'intégrale

$$\left(x - a\frac{\mu}{\nu}\right)^2 + y^2 = A^2.$$

Enfin la troisième équation (6), multipliée par $\cos\omega$, peut prendre la forme $z = C_1$ et l'on retrouve les surfaces (10) qui sont évidemment de révolution autour de la droite

$$\nu x = a\mu, \qquad y = 0.$$

Si D *et* D′ *sont coplanaires et parallèles avec l'axe d'une surface de révolution* S, *un contour* C, *tracé sur celle-ci, donne, pour les axes de rotation* D *et* D′, *des volumes tournants de rapport constant. Ces volumes sont égaux si* D *et* D′ *sont équidistants de l'axe de* S.

Pour imaginer une figure, admettons que D et D′ soient d'un même côté de l'axe de la surface et à des distances de cet axe

$$\delta = a\left(\frac{\mu}{\nu} - 1\right), \qquad \delta' = a\left(\frac{\mu}{\nu} + 1\right).$$

On conclut immédiatement de là, pour le rapport des volumes tournants,

$$\frac{n}{m} = \frac{\delta}{\delta'}.$$

5. *Cas des axes* D *et* D′ *concourants; a est nul,* ω, *m et n sont quelconques.* — Cette fois l'équation (4) conduit au système différentiel

$$\frac{x\,dx}{\mu\cos^2\omega.\zeta - \nu\sin^2\omega.\eta} = \frac{d\eta}{\nu} = -\frac{d\zeta}{\mu}$$

qui admet les combinaisons

$$x\,dx + \cos^2\omega.\zeta\,d\zeta + \sin^2\omega.\eta\,d\eta = 0,$$
$$\mu\,d\eta + \nu\,d\zeta = 0$$

et, par suite, les intégrales

$$x^2 + \cos^2\omega.\zeta^2 + \sin^2\omega.\eta^2, \qquad \mu\eta + \nu\zeta.$$

On a donc les surfaces

(11) $$x^2 - y^2 + z^2 = \varphi(\mu\cos\omega.y + \nu\sin\omega.z)$$

qui sont encore des surfaces de révolution. L'axe est la droite

$$x = 0, \qquad \frac{z}{y} = \frac{\nu}{\mu}\tang\omega.$$

Ces résultats se déduisent encore très simplement du système (6) où l'on annule a.

L'axe Δ de la surface (11) est donc dans le plan de D et D'; il passe par l'intersection de ces axes de rotation. Si Ω est l'angle $\Delta O y$, disposé comme DOy, la seconde équation de Δ se traduit évidemment par

$$\tang\Omega = \frac{m-n}{m+n}\tang\omega. \tag{12}$$

Si deux droites D *et* D', *se coupent sur l'axe* Δ *d'une surface de révolution* S *et sont coplanaires à* Δ, *tout contour tracé sur* S *donne, quant aux axes de rotation* D *et* D', *des volumes tournants de rapport constant. Ces volumes sont égaux quand* Δ *est l'une quelconque des bissectrices de* D *et* D'.

Il est assez curieux de retrouver ici la formule (12) qui est bien connue, mais dans des sujets fort éloignés de la théorie des volumes tournants. Elle donne lieu à d'intéressants et utiles développements trigonométriques et se rencontre en de nombreuses questions d'Astronomie parce qu'au fond c'est une formule relative aux triangles sphériques rectangles. Il suffit de poser

$$\frac{n}{m} = \tang^2\frac{\psi}{2}$$

pour lui donner la forme

$$\tang\Omega = \cos\psi\tang\omega.$$

6. *Cas général.* — Il n'est pas difficile d'obtenir,

dans le cas général, des résultats géométriques aussi élégants que ceux des cas particuliers précédents. Si l'on reprend les équations (6), on peut en tirer diverses combinaisons, par exemple

$$(13)\qquad \mu\eta + \nu\zeta + (\mu^2 - \nu^2)at = B\mu + C\nu;$$

de même

$$\mu\cos^2\omega.\zeta - \nu\sin^2\omega.\eta = -kA\sin kt,$$

$$kx - \frac{a\mu\nu}{k} = kA\cos kt.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(14)\qquad k^2(\mu\cos^2\omega.\zeta - \nu\sin^2\omega.\eta)^2 + (k^2x - a\mu\nu)^2 = k^4A^2.$$

Ceci est, pour le système (5), une intégrale indépendante de t.

On en aura une autre en éliminant t entre (13) et la première équation (6), ce qui donne, en utilisant (14),

$$\frac{k}{a}\frac{\mu\eta + \nu\zeta}{\nu^2 - \mu^2} = \text{arc cos}\frac{k^2x - a\mu\nu}{k^2A} + \frac{k}{a}\frac{B\mu + C\nu}{\nu^2 - \mu^2}$$

Le terme transcendant de cette égalité peut être remplacé par

$$\text{arc tang}\frac{k(\mu\cos^2\omega.\zeta - \nu\sin^2\omega.\eta)}{k^2x - a\mu\nu}.$$

Reprenons maintenant les variables y et z; considérons le *déplacement*

$$(15)\qquad \begin{cases} X = x - \dfrac{a\mu\nu}{k^2}, \\ Y = \quad y\cos\Omega + z\sin\Omega, \\ Z = -y\sin\Omega + z\cos\Omega, \end{cases}$$

en lequel Ω est défini par les relations

$$(16)\qquad \mu\cos\omega = k\cos\Omega, \qquad \nu\sin\omega = k\sin\Omega$$

et, pour intégrale générale de l'équation (3), nous pourrons écrire

$$(17)\quad \frac{k^2}{a(\nu^2-\mu^2)\sin\omega\cos\omega}\,\mathrm{Y} = \operatorname{arc\,tang}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{X}} + f(\mathrm{X}^2+\mathrm{Z}^2),$$

en désignant par f une fonction arbitraire.

7. On voit que le problème le plus général ici posé conduit à de simples hélicoïdes à disposer convenablement par rapport aux droites D et D'. L'équation (17) peut être présentée différemment, par exemple sous la forme

$$(18)\quad \mathrm{Y} = \frac{a(\mu^2-\nu^2)\sin\omega\cos\omega}{\mu^2\cos^2\omega+\nu^2\sin^2\omega}\operatorname{arc\,tang}\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}} + f(\mathrm{X}^2+\mathrm{Z}^2).$$

Celle-ci est propre à redonner les résultats particuliers précédemment obtenus mais par des transformations qu'on aimerait assez à justifier directement et c'est précisément cela qui nous a conduit à nous assurer d'abord des cas particuliers.

Ainsi soit $\mu = 0$, d'où $2\Omega = \pi$, d'après (16). On a

$$\mathrm{X} = x,\qquad \mathrm{Y} = z,\qquad \mathrm{Z} = -y$$

et, dans ces conditions, on retrouve (8) et les conclusions du paragraphe 3.

Soit encore $2\omega = \pi$ avec μ et ν quelconques. D'après (16) on aura encore $2\Omega = \pi$ et $k = \nu$. La transformation (15) deviendra

$$\mathrm{X} = x - \frac{\mu a}{\nu},\qquad \mathrm{Y} = z,\qquad \mathrm{Z} = -y$$

et l'on retrouvera (10) ainsi que tout le paragraphe 4.

Enfin soient a nul, ω, μ, ν quelconques. Alors (18) peut prendre la forme

$$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2 = \Psi(\mathrm{Y})$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(\mu \cos\omega . y + \nu \sin\omega . z).$$

C'est l'équation (11). Les conclusions géométriques sont d'ailleurs analogues à celles du paragraphe 5. Les relations absolument générales (16) ne le sont pas plus que (12).

8. *Généralités diverses.* — Les résultats de ce petit Mémoire ont été exposés sous des formes sensiblement équivalentes par M. Pierre Papillon, élève de la Faculté des Sciences de Toulouse, dans un travail, fort digne d'éloge, destiné à l'obtention d'un Diplôme d'études supérieures de Mathématiques. M. Papillon a d'ailleurs rattaché le sujet à d'autres.

Ainsi l'hélicoïde (18) admet évidemment l'axe

$$X = 0, \qquad Z = 0$$

ou, en coordonnées x, y, z,

$$x = \frac{a\mu\nu}{\mu^2 \cos^2\omega + \nu^2 \sin^2\omega},$$
$$\nu \sin\omega . y = \mu \cos\omega . z.$$

Quel est le lieu de cet axe, quand les volumes tournants relatifs aux droites axiales D et D′ sont dans un rapport variable?

L'élimination du rapport de μ à ν donne immédiatement la surface

$$x = \frac{a}{\sin\omega \cos\omega} \frac{yz}{y^2 + z^2}.$$

C'est le *conoïde de Plücker*. L'étude du lien existant entre l'hélicoïde et ce conoïde permet alors de revenir aux généralités classiques concernant le mouvement hélicoïdal, le théorème de Schönemann et Mannheim, etc., toutes choses que l'on trouvera notamment dans la *Théorie des Surfaces* de Gaston Darboux (t. I, 2e édition, Chap. VII), dans les *Leçons de Cinématique*, de M. G. Kœnigs (Chap. I et X; note IX), ou dans les *Principes et Développements de Géométrie cinématique* de A. Mannheim (p. 127 et 258).

On aperçoit ainsi la possibilité de faire une théorie purement géométrique de tout ce qui a été déduit, dans les pages précédentes, de l'intégration du système d'équations différentielles (5).

Nous comptons revenir sur le nouveau point de vue dans un prochain article qui contiendra d'ailleurs des références bibliographiques plus détaillées.