NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON POMEY

Sur une extension des séries de Bertrand

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 281-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__281_0>

[D2b]

SUR UNE EXTENSION DES SÉRIES DE BERTRAND;

PAR LÉON POMEY.

---

1. On sait former (voir E. BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, et C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. I, p. 288 à 300) des séries numériques de moins en moins rapidement convergentes. Les plus connues sont celles de J. Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \sum \frac{1}{n.(\operatorname{Log} n)^{1+\rho}}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{n.\Lambda_m n(\operatorname{Log}_m n)^\rho},$$

en prenant pour ρ une *constante* > 0 et en posant

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log} n = \operatorname{Log}_2 n, \qquad \operatorname{Log}\operatorname{Log}_2 n = \operatorname{Log}_3 n, \qquad \ldots,$$
$$\Lambda_m n = \operatorname{Log} n.\operatorname{Log}_2 n \ldots \operatorname{Log}_m n.$$

Rappelons qu'on les utilise notamment pour reconnaître si une série donnée Σu_n est convergente; en effet soit Σv_n l'une de ces séries convergentes; d'après un théorème classique, si à partir d'une certaine valeur de n on a constamment $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, la série Σu_n sera aussi convergente; on développe donc les deux rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et l'on compare leurs valeurs respectives en négligeant les termes d'ordre supérieur (ce qui conduit en particulier à la règle de Gauss). D'ailleurs pour effectuer ces développements, on peut se servir des formules connues (voir Jordan, *loc. cit.*) que voici

$$\mathrm{Log}_m^\rho(n+1) = \mathrm{Log}_m^\rho n\left(1+\frac{\rho}{n\Lambda_m n}\right),$$

$$\frac{(n+1)^\rho}{n^\rho} = 1+\frac{\rho}{n}+\frac{\rho(\rho-1)}{2n^2}+\ldots,$$

$$\frac{(n+1).\Lambda_m(n+1).\mathrm{Log}_m^\rho(n+1)}{n\Lambda_m n.\mathrm{Log}_m^\rho n}$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\,\mathrm{Log}\,n}+\ldots+\frac{1+\rho}{n\Lambda_m n}+\frac{\varepsilon}{n^2}.$$

2. Cela posé, employons cette méthode pour *démontrer l'existence d'une série peu différente par sa forme de la série* $\sum\frac{1}{n^{1+\rho}}$ *mais moins rapidement convergente, avec cette particularité que l'exposant* $1+\rho$ *soit variable* ET TENDE VERS L'UNITÉ.

Telle est, par exemple, la série $\sum\frac{1}{n^{1+\frac{r}{\log\log n}}}$, *où* r *est une constante positive arbitraire.*

En effet, pour établir sa convergence, appelons u_n son terme général $\frac{1}{n^{1+\frac{r}{\log_2 n}}}$ et formons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On trouve par quelques calculs que le lecteur restituera, sans grande peine, la relation

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{1}{n}+\frac{r}{\log_2 n.\log_2(n+1)}$$
$$\times[\log n.\log_2(n+1)-\log_2 n.\log(n+1)]+\ldots,$$

et pour le crochet, le développement

$$\frac{1}{n}-\frac{\log_2 n}{n}+\ldots:$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{1}{n}-\frac{r}{n\log_2(n+1)}+\ldots.$$

Comparons ce rapport au rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ relatif à la série de Bertrand Σv_n convergente, où $v_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$ avec $\alpha = 1 + \rho > 1$. Il vient

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n \log_2(n+1)} - \frac{\alpha}{n \log n} + \ldots,$$

quantité qui, à partir d'une valeur suffisamment grande de n, devient et reste positive quelles que soient les constantes r et ρ.

Donc la série Σu_n est bien convergente.

3. On pourrait opérer d'une manière analogue avec les autres séries de Bertrand, en remplaçant de même dans chacune la quantité *fixe* ρ par une quantité *qui tende vers zéro* (comme nous venons de le faire en remplaçant ρ par $\frac{r}{\log_2 n}$ dans la première de ces séries).

Les nouvelles séries ainsi formées permettront à leur tour, comme les séries de Bertrand, de former par la même méthode de nouveaux critères de convergence analogues à celui de Gauss.