CH. BIOCHE

Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces gauches

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 260-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__260_1>

[O[1]4f]

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES SURFACES GAUCHES;

PAR CH. BIOCHE.

La détermination du degré d'une ligne ou d'une surface, définie par certaines conditions géométriques, est ordinairement assez délicate. Les énoncés généraux ne peuvent pas toujours s'appliquer, parce qu'il se présente, très fréquemment, des particularités; de sorte qu'on peut être conduit (et cela est arrivé à des mathématiciens éminents) à des résultats erronés. C'est pourquoi je pense que les remarques suivantes peuvent présenter de l'intérêt.

1. M. Émile Picard a montré que, sur une surface gauche dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, il existe une courbe (que j'appellerai *courbe de M. Picard*), dont les tangentes appartiennent à ce complexe, cette courbe est le lieu des points doubles de l'homographie existant entre le pôle d'un plan passant par une génératrice et le point de contact de ce plan avec la surface; c'est une asymptotique dont le degré et la classe sont égaux à la classe d'une section plane de la surface.

2. Considérons d'abord le cas où les génératrices n'appartiennent qu'à un seul complexe linéaire et où ce complexe est *spécial*, c'est-à-dire où les droites du complexe sont celles qui rencontrent une droite Δ.

Le pôle d'un plan passant par une génératrice est le point d'intersection de celle-ci avec Δ. Il n'existe plus, sur la surface, d'asymptotique dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire (sans quoi les génératrices appartiendraient à une infinité de complexes linéaires) et il n'y a pas de relation entre le degré d'une asymptotique et la classe d'une section plane.

Par exemple, sur la surface qui a pour équation

$$z = 6x^2y - 5x^4,$$

les sections planes sont de sixième classe et les asymptotiques sont données par

$$y = x^2 + \frac{A}{\sqrt{x}}, \qquad z = x^4 + 6Ax\sqrt{x}.$$

A étant une constante arbitraire. Il peut même arriver que les asymptotiques ne soient pas algébriques; le cas se présente, par exemple, pour la surface du quatrième degré qui a pour équation

$$z = x^3 y - 6x^2$$

et dont les asymptotiques sont données par

$$y = \frac{1}{x} \mathrm{L A} x^2, \qquad z = x^2 \mathrm{L A} x^2 - x^2.$$

3. Si les génératrices appartiennent à une congruence linéaire, il y a une infinité de courbes de M. Picard, dont chacune correspond à un des complexes contenant cette congruence. Ces courbes sont les asymptotiques.

Si les directrices de la congruence sont distinctes, chacune de ces courbes a pour degré et pour classe la classe d'une section plane de la surface, Mais elle peut se décomposer en deux courbes de degré moitié. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la surface d'équation

$$z = \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

dont les asymptotiques sont des cubiques gauches, les sections planes de surface étant de la sixième classe.

4. Si les directrices de la congruence sont confondues, les courbes de M. Picard se décomposent, chacune d'elles comprenant la directrice de la congruence et une courbe qui ne rencontre plus chaque génératrice qu'en un point. Par exemple, pour la surface ayant pour équations

$$z = 2xy - x^4,$$

les sections sont de sixième classe, la droite de l'infini du plan $x = 0$ est directrice d'une congruence singulière, et les asymptotiques sont les courbes de quatrième ordre et de quatrième classe données par

$$y = x^3 + A, \qquad z = x^4 + 2Ax.$$

5. On peut déterminer une surface gauche par la condition d'admettre pour asymptotique une courbe C et d'avoir des génératrices rencontrant une droite D.

Si les tangentes à la courbe C appartiennent à un complexe linéaire, les génératrices de la surface rencontrent la droite D′, conjuguée de D par rapport au complexe. Elles appartiennent donc à une congruence linéaire — à directrices distinctes si D n'appartient pas au complexe, à directrices confondues si D appartient au complexe — et les asymptotiques, pouvant se déduire les unes des autres par une transformation homographique, sont des courbes de même degré et de même classe que C.

Si les tangentes à C n'appartiennent pas à un complexe linéaire, il n'y a pas de lignes asymptotiques appartenant à un pareil complexe, cela résulte de ce que je viens de dire; et alors il n'y a pas d'égalité entre le degré ou la classe des asymptotiques et le degré ou la classe, soit de C, soit des sections planes. On le voit sur le premier exemple que j'ai cité (§ 2); la surface considérée a été obtenue en prenant pour C une biquadratique de quatrième classe.

6. Si la courbe C est de degré m, de classe K, la droite D ne rencontrant pas C, cette droite est directrice multiple d'ordre K de la surface, et celle-ci est de degré $m + K$. Si D rencontre C en p points, et est

située dans q plans osculateurs, la surface n'est plus que du degré $m + K - p - q$.

Il peut arriver que le degré obtenu, comme je viens de le dire, soit double du degré effectif ; par exemple, si l'on prend pour C la courbe

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3, \qquad Z = \lambda$$

et pour D la droite de l'infini du plan $X = 0$, on obtient une surface du troisième degré

$$X = \frac{Y^2}{Z^2}$$

au lieu d'une surface du sixième degré, parce que les points de la courbe se correspondent deux à deux de façon que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre.

7. Or ce fait se présente pour les courbes C de degré pair, tracées sur une surface du second degré et ayant pour tangentes des droites appartenant à un complexe linéaire.

En effet, une courbe possédant ces propriétés est, comme l'a montré Halphen, transformée homographique d'une courbe donnée par

$$X = \lambda^{\alpha+\beta}, \qquad Y = \lambda^{\alpha}, \qquad Z = \lambda^{\beta},$$

α, β, étant des entiers, premiers entre eux, et impairs si la courbe est de degré pair. Le plan osculateur en un point a pour équation

$$(\alpha - \beta)X - (\alpha + \beta)\lambda^{\beta}Y + (\alpha + \beta)\lambda^{\alpha}Z - (\alpha - \beta)\lambda^{\alpha-\beta} = 0,$$

Soit λ' la valeur du paramètre correspondant en un point où le plan osculateur recoupe la courbe, posons $\lambda' = \lambda u$, l'équation qui donne u est

$$(\alpha-\beta)\,U^{\alpha+\beta}-(\alpha+\beta)\,U^{\alpha}+(\alpha+\beta)\,U^{\beta}-(\alpha-\beta)=0.$$

Elle a trois variations; elle admet 1 comme racine triple, et si α et β sont tous deux impairs (pour que $\alpha+\beta$ soit pair), on voit que l'équation obtenue en changeant u en $-u$ n'a plus qu'une variation. L'équation proposée n'a donc qu'une racine négative, et il est facile de voir que celle-ci est -1.

La droite qui joint des points pour lesquels les valeurs de λ sont opposées, engendre la surface qui a pour équation

$$X^{\frac{\alpha-\beta}{2}}=\left(\frac{Y}{Z}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Elle peut être considérée comme obtenue en prenant C comme asymptotique, D étant la droite de l'infini du plan $X=0$.

Si α et β avaient été l'un pair, l'autre impair, la surface obtenue aurait eu pour équation

$$X^{\alpha-\beta}=\left(\frac{Y}{Z}\right)^{\alpha+\beta}.$$