

ÉMILE BOREL

**Sur la théorie des formes linéaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 5<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1923), p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1923\\_5\\_2\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__1_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

---

---

[A 2a]

SUR LA THÉORIE DES FORMES LINÉAIRES ;

PAR ÉMILE BOREL.

---

On expose généralement la théorie des formes linéaires comme conséquence de la théorie des équations linéaires et des déterminants; il me paraît intéressant de montrer comment on peut l'exposer directement. Cette manière de procéder familiariserait les élèves avec des méthodes fécondes en analyse.

THÉORÈME I. — *Une fonction continue qui satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$(1) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

*est nécessairement de la forme  $\varphi(x) = Ax$ , A désignant une constante.*

On déduit aisément de (1) que,  $\alpha$  étant un nombre rationnel, on a

$$(2) \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

et l'hypothèse de la continuité entraîne l'égalité (2), quel que soit  $\alpha$ . Il suffit, dans (2), de poser  $\alpha = X$ ,

( 2 )

$x = 1, \varphi(1) = A$  pour obtenir

$$\varphi(X) = AX, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

**THÉORÈME II.** — *Une fonction continue de  $n$  variables qui satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

*est nécessairement de la forme*

$$\varphi = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n,$$

où  $A_1, A_2, \dots, A_n$  désignent des constantes.

Pour abrégér les écritures, bornons-nous au cas de deux variables (1). On obtiendra, comme dans le théorème I,

$$\varphi(\alpha x, \alpha y) = \alpha \varphi(x, y).$$

De même

$$\varphi(\beta x_1, \beta y_1) = \beta \varphi(x_1, y_1)$$

et, par suite,

$$\varphi(\alpha x + \beta x_1, \alpha y + \beta y_1) = \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(x_1, y_1).$$

Il suffit de poser

$$\begin{aligned} x = 1, \quad x_1 = 0, \quad y = 0, \quad y_1 = 1; \\ \alpha = X, \quad \beta = Y; \\ \varphi(1, 0) = A, \quad \varphi(0, 1) = B; \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\varphi(X, Y) = AX + BY. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

---

(1) On pourrait aussi ramener le cas de plusieurs variables au cas d'une seule au moyen de l'égalité

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, y).$$

Mais la méthode du texte me paratt plus instructive.

**DÉFINITIONS.** — On appelle *forme linéaire* un polynome homogène du premier degré. On dit que  $k$  formes linéaires sont *indépendantes* lorsqu'elles peuvent prendre des valeurs quelconques, pour des valeurs convenablement choisies des variables. Il existe au moins un système de  $n$  formes indépendantes à  $n$  variables, ce sont ces variables elles-mêmes

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Le théorème II peut être énoncé sous la forme abrégée : *l'équation fonctionnelle (3) caractérise les formes linéaires à  $n$  variables.*

**THÉORÈME III.** — *Étant données  $k$  formes linéaires indépendantes à  $n$  variables,  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , pour qu'une  $(k + 1)^{\text{ème}}$  forme  $f_{k+1}$  constitue avec elles un système de  $k + 1$  formes indépendantes, il faut et il suffit qu'il existe deux systèmes de valeurs des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$  donnant aux  $k$  premières formes les mêmes valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_k$  et à  $f_{k+1}$  deux valeurs distinctes  $a_{k+1}$  et  $b_{k+1}$  ( $a_{k+1} - b_{k+1} \neq 0$ ).*

Donnons-nous  $k + 1$  nombres arbitraires  $m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}$ . Les formes  $f_1, f_2, \dots, f_k$  étant indépendantes, il y a des valeurs  $u_1, u_2, \dots, u_n$  des variables qui leur font prendre les valeurs  $m_1, m_2, \dots, m_k$ ; pour ces valeurs  $u$ , la forme  $f_{k+1}$  prend la valeur  $l_{k+1}$ . Si l'on pose

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + \lambda(x_1 - y_1), & v_2 &= u_2 + \lambda(x_2 - y_2), & \dots, \\ v_n &= u_n + \lambda(x_n - y_n), \end{aligned}$$

les formes données prendront pour  $v_1, \dots, v_n$  les valeurs données  $m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}$  pourvu que  $\lambda$

soit donné par la relation

$$l_{k+1} + \lambda (a_{k+1} - b_{k+1}) = m_{k+1}.$$

Le théorème III entraîne le corollaire suivant, qui n'est en réalité qu'une autre forme de son énoncé.

**COROLLAIRE.** — *Étant données  $k$  formes indépendantes  $f_1, f_2, \dots, f_k$  et une  $k+1$ <sup>ième</sup> forme quelconque  $f_{k+1}$ , de deux choses l'une : ou bien les  $k+1$  formes sont indépendantes ou bien, lorsque l'on assigne aux  $k$  premières des valeurs quelconques  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , la valeur  $a_{k+1}$  de  $f_{k+1}$  est déterminée d'une manière unique.* Plaçons-nous dans ce dernier cas et considérons, outre le système des valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , un autre système quelconque  $b_1, b_2, \dots, b_k$  et enfin le système  $c_1, c_2, \dots, c_k$  défini par les relations

$$c_1 = a_1 + b_1, \dots, c_k = a_k + b_k.$$

Il est clair que si l'on désigne par  $x_1, x_2, \dots, x_n$  l'un des systèmes des valeurs des variables qui donnent aux formes les valeurs  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , par  $y_1, y_2, \dots, y_n$  l'un des systèmes qui leur donnent les valeurs  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , le système

$$z_1 = x_1 + y_1, \dots, z_n = x_n + y_n$$

sera l'un des systèmes qui leur donnent les valeurs  $c_1, c_2, \dots, c_k$ . On en conclut que la valeur correspondante  $c_{k+1}$  de  $f_{k+1}$ , qui, par hypothèse, est déterminée, est égale à  $a_{k+1} + b_{k+1}$ .

Par suite <sup>(1)</sup>, en vertu du théorème II, la forme  $f_{k+1}$  est une forme linéaire en  $f_1, f_2, \dots, f_k$ . Donc :

**THÉORÈME IV.** — *Lorsque l'on a  $k$  formes indé-*

(1) Nous admettons ici la continuité, qu'il serait facile de prouver par des raisonnements élémentaires.

On peut par exemple utiliser le fait que la valeur de  $\lambda$  donnée



et que  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$  sont supposées indépendantes. L'hypothèse est donc contredite et le théorème est démontré.

On en conclut immédiatement que, si l'on a un système de  $n$  formes indépendantes à  $n$  variables, il existe un seul système de valeurs des variables leur faisant prendre des valeurs données, car s'il existait deux tels systèmes, dans lesquels les variables n'auraient pas toutes les mêmes valeurs, on aurait par exemple  $x_1 = \alpha$  et  $x_1 = \beta$ , et la forme  $x_1$  constituerait avec les formes données, d'après le théorème III, un système de  $n + 1$  formes indépendantes.

On remarquera que les démonstrations données ne se contentent pas de prouver l'existence de certaines relations ou de certains systèmes de valeurs des variables, mais donnent le moyen de les déterminer. D'une manière précise, elles donnent le moyen de traiter tous les problèmes relatifs à  $k + 1$  équations linéaires ou à  $k + 1$  formes lorsque l'on sait traiter les mêmes problèmes pour  $k$  équations ou  $k$  formes.

REMARQUE. — Pour donner un exemple de la facilité avec laquelle les théorèmes établis permettent de démontrer toutes les propositions relatives aux équations linéaires, proposons-nous de prouver que *lorsque l'on donne les valeurs de  $k$  formes linéaires indépendantes à  $n$  variables ( $k < n$ ) les valeurs de  $n - k$  précisément de ces variables peuvent être prises arbitrairement*. En effet, si chacune des  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  était déterminée, ces  $n$  variables seraient des formes linéaires en  $f_1, f_2, \dots, f_k$ ; comme ces formes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seraient indépendantes, on est en contradiction avec le théorème III.

Nous devons donc admettre qu'une des variables au

moins, par exemple  $x_1$  forme avec  $f_1, f_2, \dots, f_k$  un système de  $k + 1$  formes indépendantes.

Si l'on a  $k + 1 < n$ , on peut raisonner sur ce nouveau système comme sur le précédent; si  $x_2, x_3, \dots, x_n$  s'exprimaient linéairement au moyen de ces  $k + 1$  formes, comme c'est le cas aussi pour  $x_1$ , on aurait  $n$  formes indépendantes de  $k + 1 < n$  variables. Il y a donc au moins une variable  $x_2$  qui constitue avec  $f_1, f_2, \dots, f_k, x_1$  un système de  $k + 2$  formes indépendantes. On continuera de même et l'on adjoindra d'autres variables  $x_3, \dots, x_p$  jusqu'à ce que l'on ait  $k + p = n$ ; on a alors  $n$  formes indépendantes à  $n$  variables et  $x_{p+1}, \dots, x_n$  s'expriment nécessairement au moyen de ces  $n$  formes.

On voit que le théorème essentiel est le théorème III, d'après lequel, lorsque l'on donne les valeurs d'un certain nombre de formes linéaires (*indépendantes*), la valeur de toute autre forme linéaire est, ou bien absolument déterminée, ou bien entièrement arbitraire. Cet énoncé s'étend de lui-même au cas où l'on y supprime le mot (*indépendantes*).