

RABATEL

Sur l'indice des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 161-166

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__161_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[A 5a]

SUR L'INDICE DES FRACTIONS RATIONNELLES ;

PAR M. RABATEL,

Professeur au Prytanée militaire de La Flèche.

Étant donnés deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$, on peut leur associer une forme quadratique dont la « signature », c'est-à-dire la différence entre le nombre de ses carrés positifs et le nombre de ses carrés négatifs est égale à l'indice de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$. Ce théorème, établi par Hurwitz (¹), est la généralisation d'un théorème d'Hermite (²) pour le cas particulier de la fraction rationnelle $\frac{f'}{f}$.

Je me propose de donner une nouvelle démonstration de ce théorème et de montrer que la forme quadratique associée à f et g est liée d'une façon simple au résultant de Bezout de ces deux polynomes.

Soient

$$f = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n,$$

$$g = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n,$$

et supposons d'abord les degrés égaux.

(¹) *Math. Ann.*, Bd 46.

(²) Voir, par exemple, SERRET, *Algèbre I*.

Posons

$$f_0 = A_0, \quad f_1 = A_0 x + A_1, \quad f_2 = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \quad \dots,$$

$$g_0 = B_0, \quad g_1 = B_0 x + B_1, \quad g_2 = B_0 x^2 + \dots$$

$$F_1 \equiv f g_0 - g f_0 = A_{11} x^{n-1} + A_{12} x^{n-2} + \dots + A_{1n},$$

$$F_2 \equiv f g_1 - g f_1 = A_{21} x^{n-1} + \dots + A_{2n},$$

$$\dots$$

$$F_n \equiv f g_{n-1} - g f_{n-1} = A_{n1} x^{n-1} + \dots + A_{nn}.$$

On a

$$A_{ik} = A_{ki},$$

et le résultant de Bezout de f et g est

$$B = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Appelons forme quadratique *associée* à f et g la forme

$$T = \Sigma A_{ik} x_i x_k.$$

Ceci posé, on sait que pour calculer l'indice $\frac{f}{g}$ on est conduit à faire sur g et f les opérations de recherche du plus grand commun diviseur en changeant le signe du reste (1) :

$$g = f Q_1 - R_1,$$

$$f = R_1 Q_2 - R_2,$$

$$\dots$$

$$R_{k-2} = R_{k-1} Q_k - R_k,$$

ou

$$R_1 = f Q_1 - g,$$

$$R_2 = R_1 Q_2 - f,$$

$$\dots$$

$$R_k = R_{k-1} Q_k - R_{k-2},$$

(1) CAUCHY, *Calcul des Indices* (Œuvres complètes).

ce qui donne

$$R_k = U_k f + V_k g,$$

R_k de degré $n - k$, U_k et V_k de degré $k - 1$.

L'indice de $\frac{f}{g}$ est égal au nombre de variations perdues par la suite

$$g, f, R_1, R_2, \dots, R_n$$

quand on y remplace successivement x par $-\infty$ et $+\infty$.

Calcul de R_k . - F_1, F_2, \dots, F_n étant indépendants, on a

$$\begin{aligned} R_k &= \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n \\ &= f(\lambda_1 g_0 + \dots + \lambda_n g_{n-1}) \\ &\quad - g(\lambda_1 f_0 + \dots + \lambda_n g_{n-1}), \end{aligned}$$

et, comme U_k est de degré $k - 1$,

$$\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

En exprimant que R_k est de degré $n - k$, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_{11} + \dots + \lambda_k A_{k1} &= c, \\ \dots &\dots \\ \lambda_1 A_{1k-1} + \dots + \lambda_k A_{kk-1} &= 0. \end{aligned}$$

qui, joint à

$$\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_k F_k = R_k,$$

donne, par élimination des λ et simplification,

$$R_k = \mu_k \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k-1} & A_{1k} x^{n-k} + \dots + A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk-1} & A_{kk} x^{n-k} + \dots + A_{kn} \end{vmatrix},$$

μ_k étant un facteur à déterminer.

De même, on a

$$\lambda_1 g_0 + \dots + \lambda_k g_{k-1} = U_k$$

et

$$U_k = \mu_k \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k-1} g_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} g_{k-1} \end{vmatrix},$$

μ_k étant le même coefficient.

Calcul de μ_k . — Désignons par R'_k , U'_k , Q'_k , le coefficient de la plus haute puissance de x dans R_k , U_k , Q_k , nous déduisons de

$$R_{k-1} = R_k Q_{k+1} - R_{k+1},$$

eu égard aux degrés,

$$R_{k-1} = R'_k Q'_{k+1}$$

et de même de

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= R_k Q_{k+1} - R_{k-1} \\ &= (U_k f + V_k g) Q_{k+1} - (U_{k-1} f + V_{k-1} g) \\ &= (U_k Q_{k+1} - U_{k-1}) f + (\dots) g, \\ U_{k+1} &= U_k Q_{k+1} - U_{k-1}, \end{aligned}$$

et

$$U'_{k+1} = U'_k Q_{k+1}.$$

En éliminant Q'_{k+1} , on obtient

$$U_{k+1} R'_k = U_k R_{k-1} = \dots = U'_2 R'_1 = B_0.$$

En appelant Δ_k le mineur du déterminant de Bezout formé avec les k premières lignes et les k premières colonnes, on a

$$\begin{aligned} R'_k &= \mu_k \Delta_k, \\ U'_k &= \mu_k B_0 \Delta_{k-1} \end{aligned}$$

et

$$\mu_k \mu_{k+1} = \frac{1}{\Delta_k^2} > 0.$$

Tous les μ sont donc de même signe et comme

$$\mu_1 = \frac{1}{\Lambda_0}$$

ils sont du signe de Λ_0 (1).

Nous avons donc à considérer la suite

$$B_0 x^n, \quad A_0 x^n, \quad \Lambda_0 \Delta_1 x^{n-1}, \quad \Lambda_0 \Delta_2 x^{n-2}, \quad \dots, \quad \Lambda_0 \Delta_n$$

ou

$$x^n, \quad \Delta_1 x^{n-1}, \quad \Delta_2 x^{n-2}, \quad \dots, \quad \Delta_n.$$

Si l'on se reporte à l'étude des formes quadratiques(2) on voit que l'indice de $\frac{f}{g}$ est égal à la signature de la forme quadratique T.

En particulier, les conditions pour que l'indice soit égal à n ou que T soit définie positive sont

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Supposons maintenant que le degré de f soit $n - p$, il suffit dans les calculs précédents de supposer

$$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \dots = \Lambda_{p-1} = 0$$

et poser

$$f = A_p x^{n-p} + \dots + A_n.$$

Le résultat subsiste par raison de continuité. On peut prendre en effet $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{p-1}$ suffisamment petits pour que toutes les racines de f nouvellement introduites soient supérieures aux racines de g et que le signe de f au voisinage d'une racine de g ne soit pas

(1) La valeur de μ_k n'est pas nécessaire pour la suite. Le calcul donne

$$\mu_{2k} = \Lambda_0 \frac{\Delta_2^2 k-1, \Delta_2^2 k-1 \dots \Delta_2^2}{\Delta_2^2 k-1 \dots \Delta_1^2},$$

$$\mu_{2k+1} = \frac{1}{\Lambda_0} \frac{\Delta_2^2 k-1 \dots \Delta_1^2}{\Delta_2^2 k \dots \Delta_2^2}.$$

(2) SERRET, *Algèbre*, I.

changé. L'indice sera le même et quand A_0, \dots, A_{p-1} tendent vers zéro ces racines s'éloignent à l'infini et aucun carré ne s'évanouit.

Si le degré de f est égal à $n + p$, on peut ramener le problème au cas précédent en remplaçant f par le reste de la division de f par g . Si p est pair, l'indice de $\frac{f}{g}$ est égal à la signature de la forme quadratique à $n + p$ variables associée à f et g , mais si p est impair elle en diffère d'une unité (1).