

## Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 5<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1923), p. 157-160

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1923\\_5\\_2\\_\\_157\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__157_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.**

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un cône homogène, de révolution, dont le sommet O est fixe, tourne uniformément autour*

de son axe, avec une vitesse angulaire  $\omega_0$ . Brusquement, une arête est immobilisée : quelle vitesse de rotation prend le solide autour de l'arête fixe? On désignera par  $\alpha$  le demi-angle au sommet du cône.

II. Dans un plan vertical, une droite D se déplace en restant tangente à une courbe fixe C. La rotation de la droite (relativement à une direction invariable) est uniforme. Un point matériel M est assujéti à rester sur la droite D; les liaisons sont bilatérales et sans frottement. Étudier le mouvement relatif du point M sur la droite.

On formera l'équation différentielle du mouvement relatif dans le cas général d'une courbe plane quelconque C, et d'un point pesant M, n'ayant initialement pas de vitesse relative. On étudiera les cas suivants :

1<sup>e</sup> La courbe C est un cercle et le point M n'est pas pesant.

2<sup>e</sup> La courbe C est un cercle et le point M est pesant. Le mouvement relatif peut-il être pendulaire? Peut-il y avoir équilibre relatif? Le mouvement relatif peut-il s'effectuer dans un même sens?

3<sup>e</sup> La courbe C étant quelconque, peut-il y avoir équilibre relatif?

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — On partira de l'équation naturelle,  $R = f(\alpha)$ , de la courbe C, et l'on appliquera la méthode de Lagrange. Dans le 3<sup>e</sup>, on obtiendra l'équation naturelle de C, et, par deux quadratures, les expressions paramétriques des coordonnées d'un point, en termes finis.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Construire le noyau d'une plaque homogène, demi-circulaire. (On déterminera par le calcul les centres de percussion associés à diverses tangentes du contour de la plaque.)

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — Application immédiate du cours. Le noyau est limité par un triangle mixtiligne : deux segments de droite et un arc d'ellipse.

(Montpellier, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une barre homogène pesante de

masse  $m$ , de longueur  $l$  est suspendue par son milieu  $O$  et s'appuie sur un plan horizontal  $P$  passant par le point  $O$ .

Un anneau pesant de même masse  $m$  coulisse librement sur la barre.

A l'instant initial l'ensemble tourne autour de la verticale  $Oz$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ , l'anneau est à une distance  $a$  du point  $O$  et glisse sur la barre avec une vitesse relative  $\alpha\omega$ .

1° Calculer le couple variable d'axe  $Oz$  qu'il faut appliquer à la barre pour maintenir la vitesse angulaire  $\omega$ . Quelle est la trajectoire de l'anneau sur le plan  $P$ .

2° Les seules forces appliquées étant les poids, étudier le mouvement, indiquer l'allure de la rotation et la forme de la trajectoire de l'anneau.

3° On supprime le plan  $P$  d'appui et l'on demande de reprendre la deuxième partie

*On néglige les frottements.*

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — 1° Le couple cherché est

$$\Gamma = 2m\omega x x',$$

$x$  étant la distance de l'anneau au point  $O$ . Le mouvement relatif de l'anneau par rapport à la barre est donné par

$$\begin{aligned} x'' &= \omega^2 x, \\ \text{d'où} \quad x &= a \operatorname{ch} \omega t + \alpha \operatorname{sh} \omega t; \end{aligned}$$

l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est donc

$$\rho = a \operatorname{ch} \theta + \alpha \operatorname{sh} \theta.$$

Le couple est connu en fonction du temps.

2° Le théorème des moments et celui de la force vive donnent

$$\begin{aligned} (k^2 + x^2) \frac{d\theta}{dt} &= (k^2 + a^2)\omega, \\ (k^2 + x^2) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 &= (k^2 + a^2 + \alpha^2) \omega^2. \end{aligned}$$

Le mouvement de l'anneau est défini par l'équation

$$\frac{dx}{d\theta} = \pm (k^2 + x^2) \sqrt{\frac{k^2 + a^2 + x^2}{(k^2 + a^2)^2} - \frac{1}{k^2 + x^2}},$$

la valeur initiale de  $\frac{dx}{d\theta}$  étant  $\alpha$ ; la discussion ne présente pas de difficultés. La première des équations écrites montre que la vitesse de rotation conserve un signe constant et indique ses variations avec  $x$ .

3° Le mouvement est à trois paramètres  $x$ ,  $\theta$  et l'angle  $\varphi$  de la barre avec la verticale ascendante. On a toujours deux équations par les forces vives et les moments :

$$\begin{aligned} (k^2 + x^2) \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sin^2 \varphi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \\ = (k^2 + a^2 + x^2) \omega^2 - 2gx \cos \varphi, \\ (k^2 + x^2) \sin^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} = (k^2 + a^2) \omega. \end{aligned}$$

Une troisième équation (équation de Lagrange relative à  $x$  ou équation du mouvement relatif de l'anneau) sera

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x \left[ \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sin^2 \varphi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + g \cos \varphi = 0.$$

L'étude détaillée du mouvement serait assez délicate. On pourra remarquer que, d'après la première équation, l'anneau doit rester au-dessous du plan

$$z = \frac{k^2 + a^2 + x^2}{2g} \omega^2,$$

et que la rotation de la barre a lieu toujours dans le même sens.

(Nancy, juin 1920.)

