

E. LAINÉ

Sur les transformations de contact

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 131-144

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__131_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[P¹⁶⁶e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT ;

PAR E. LAINÉ.

La présente Note, rédigée à l'intention des candidats à l'Agrégation, a pour but de préciser le mode d'application de la théorie des transformations de contact au problème de l'intégration des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Nous nous contenterons de rappeler les résultats essentiels de la théorie des transformations de contact, renvoyant, par exemple, pour la démonstration, aux leçons classiques de M. Goursat (¹).

I. — Équations différentielles et transformations de contact du plan.

1. On appelle élément linéaire (x, y, p) l'ensemble d'un point (x, y) et d'une droite de coefficient angulaire p passant par ce point.

Lorsque x, y et p sont des fonctions d'un paramètre

(¹) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Chap. IX et X.

variable telles que l'on ait

$$(1) \quad dy - p \, dx = 0,$$

les ∞^1 éléments correspondant aux différentes valeurs du paramètre forment une multiplicité m_1 ; l'ensemble des points appartenant à cette m_1 en est le support ponctuel.

Si le support ponctuel se réduit à un point, la m_1 se compose de ce point et des ∞^1 droites qui s'y coupent : ces m_1 particulières sont désignées par la notation m_1^0 . Si le support ponctuel forme une courbe, la m_1 se compose des points et des tangentes de la courbe, chaque tangente étant associée à son point de contact : ces m_1 sont désignées par la notation m_1^1 .

2. Cherchons, par exemple, à quelle condition les équations

$$(2) \quad f(x, y, p) = 0, \quad \varphi(x, y, p) = 0$$

définissent une m_1 . On aura, en différentiant,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp = 0, \end{cases}$$

et les équations (2) et (3) doivent entraîner l'équation (1). Il existe donc deux coefficients λ et μ tels que l'on ait, en tenant compte de (2),

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} - p &= 0, \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 1 &= 0, \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial p} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant λ et μ ,

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial p} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

ou encore, en employant la notation des crochets de Jacobi,

$$(4) \quad [f, \varphi] = 0.$$

Ainsi, pour que les équations (2) définissent une m_1 , il faut qu'elles entraînent l'équation (4). Inversement, si les équations (2) entraînent (4), on a, par exemple,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

et l'on tire des équations (3)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (dy - p dx) = 0.$$

Si le premier facteur était nul, les fonctions f et φ ne seraient pas indépendantes, et les équations (2) ne pourraient évidemment définir une m_1 . En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (2) définissent une m_1 , est que f et φ soient deux fonctions indépendantes, et que les équations (2) entraînent (4). Par suite pour que les équations

$$f(x, y, p) = a, \quad \varphi(x, y, p) = b$$

définissent, quelles que soient les constantes a et b , une m_1 , il faut et il suffit que f et φ soient deux fonctions distinctes annihilant identiquement le crochet $[f, \varphi]$: on dit dans ce cas que ces deux fonctions sont en involution.

3. L'équation

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0$$

définit ∞^2 éléments; cherchons à associer ces éléments de façon à obtenir des m_1 .

Si le premier membre de (5) ne contient pas p , la solution est immédiate. Soit (C) la courbe définie alors par l'équation (5); cette équation est vérifiée par tous les éléments obtenus en associant à chaque point de (C) une droite arbitraire passant par ce point. On aura donc deux catégories de m_1 vérifiant l'équation (5) :

1° Les m_1^0 ayant pour support ponctuel un point quelconque de la courbe (C);

2° La m_1^1 ayant pour support ponctuel la courbe (C) elle-même.

Quand f contient p , le problème proposé est identique à celui de l'intégration de l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0,$$

les m_1^0 qui vérifient l'équation (5) fournissent alors des intégrales au sens de Lie (1).

Pour plus de symétrie nous désignerons désormais par p et r les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'équation (5) représente alors indifféremment ∞^2 éléments linéaires, ou une équation différentielle du premier ordre. Intégrer cette équation revient à associer, de toutes les manières possibles, ces ∞^2 éléments de façon à obtenir des m_1 .

4. Nous allons généraliser un peu la notion d'enveloppe. Rappelons que, étant donnée une famille de courbes à un paramètre

$$f(x, y, a) = 0,$$

(1) E. GOURSAT, *loc. cit.*, n° 63.

on dit ordinairement que ces courbes ont une enveloppe quand :

1° Les équations

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

ne sont pas incompatibles :

2° L'élimination de a entre ces deux équations conduit à une équation en (x, y) qui définit une courbe.

Considerons une famille de multiplicités à un paramètre. Il peut se présenter trois cas :

1° Il existe, a distance finie ou non, un nombre limité d'éléments tels que chacun d'eux appartienne à toutes les multiplicités de la famille. Dans ce cas nous dirons qu'il existe une enveloppe \mathcal{C}_0 ;

2° Il existe une multiplicité, n'appartenant pas à la famille considérée, mais telle que chacun de ses éléments appartienne à une multiplicité de la famille. Dans ce cas nous dirons qu'il existe une enveloppe \mathcal{C}_1 ;

3° Enfin, en dehors de ces deux cas, nous dirons que la famille considérée n'a pas d'enveloppe.

Soit, par exemple, une famille de m_1^1 ayant pour supports ponctuels une famille de courbes algébriques

$$f(x, y) = a.$$

Il existe une enveloppe formée des éléments déterminés par les points communs à l'infini de toutes ces courbes. Soit encore une famille d'ellipses égales tangentes à une droite donnée en un point donné ; elles déterminent une famille de m_1^1 à un paramètre ayant encore évidemment une enveloppe \mathcal{C}_0 . Soit enfin une famille de courbes à un paramètre ayant un point commun (x_0, y_0) . Il existe, pour les m_1^1 correspondantes,

une enveloppe C_1 , qui n'est autre que la m_1^0 ayant pour support ponctuel le point (x_0, y_0) .

Ceci posé, l'équation (5) représente une famille de m_1 à un paramètre, qui donnent par définition l'intégrale générale; s'il existe une enveloppe, elle sera nommée intégrale singulière. Quand f ne dépend pas de p , les m_1^0 qui ont pour supports ponctuels les divers points de la courbe (C) correspondante donnent l'intégrale générale; la m_1^1 qui a pour support ponctuel la courbe (C) donne l'intégrale singulière.

3. Soient

$$(6) \quad X = X(x, y, p), \quad Y = Y(x, y, p), \quad P = P(x, y, p)$$

des équations qui établissent une correspondance entre les éléments des plans (x, y) et (X, Y) . On dit que ces équations définissent une transformation de contact (T. C.) quand il existe une fonction non nulle $\varphi(x, y, p)$ telle que l'on ait identiquement

$$(7) \quad dY - P dX = \varphi(dy - p dx). \quad \bullet$$

Dans ce cas, à toute m_1 du plan (x, y) , les équations (6) font correspondre une M_1 du plan (X, Y) .

Inversement, si X, Y et P sont trois fonctions des variables x, y, p vérifiant (7), on démontre (1) :

- 1° Que ces trois fonctions sont distinctes;
- 2° Qu'elles vérifient les équations

$$[X, Y] = 0, \quad [P, X] = \varphi, \quad [P, Y] = \varphi P;$$

(1) Cf. par exemple, pour le cas particulier du plan, S. LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Kap. 3.

3° Que l'on a

$$(8) \quad P \equiv \frac{Y_x + pY_y}{X_x + pX_y} \equiv \frac{Y_p}{X_p},$$

où l'on a écrit d'une façon générale F_u pour $\frac{\partial F}{\partial u}$.

Cette dernière relation détermine P sans ambiguïté; il est en effet impossible que l'on ait à la fois

$$\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial p} = 0,$$

car on en déduirait successivement

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial p} = 0,$$

et par suite,

$$\varphi = [P, X] = 0.$$

On peut se donner arbitrairement l'une des fonctions X ou Y ; on prendra pour l'autre une fonction en involution avec la première, et P sera donnée par la formule (8). Comme l'équation (7) peut encore s'écrire

$$d(Y - PX) + X dP = \varphi(dy - p dx),$$

on voit aussi qu'on peut se donner arbitrairement P ; on prendra pour $Y - PX$ une fonction en involution avec P . on aura X par une formule analogue à (8) et l'on en déduira Y .

Par exemple, si X et Y sont deux fonctions distinctes arbitraires des seules variables x et y , elles vérifient la relation d'involution. La T. C. ainsi obtenue change une m_1^0 en une M_1^0 , et une m_1^1 en une M_1^1 ; elle conserve donc la nature des supports ponctuels, et on l'appelle pour cette raison « transformation ponctuelle prolongée ».

Lorsque l'une des fonctions X ou Y contient p , il en

est de même de l'autre, d'après l'équation (8); on a alors une T. C. proprement dite. On peut les obtenir toutes de la façon suivante : soit $\Omega(x, y, X, Y)$ une fonction telle que l'équation

$$\Omega = 0$$

n'entraîne pas

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial X} & \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial X} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial Y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial X} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial Y} \end{vmatrix} = 0$$

Les équations

$$\Omega = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial X} + P \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0,$$

résolues par rapport à X, Y, P , donnent la T. C. la plus générale. L'équation

$$\Omega(x, y, X, Y) = 0$$

montre qu'à une m_1^p cette T. C. fait correspondre en général une M_1^p . D'après la forme du déterminant Δ , il y a réciprocity entre les deux systèmes de variables x, y, p et X, Y, P .

Remarquons encore qu'à deux m_1 ayant un élément commun, une T. C. fait correspondre deux M_1 ayant aussi un élément commun.

Tels sont, rapidement rappelés, les points essentiels de la théorie des transformations de contact.

6. Revenons maintenant à l'équation différentielle (5)

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0.$$

Aux ∞^2 éléments représentés par cette équation, la T. C. (6) fait correspondre ∞^2 éléments représentés par l'équation

$$(5') \quad F(X, Y, P) = 0.$$

A toute intégrale de (5) correspond ainsi une intégrale de (5'), et réciproquement. En particulier, d'après ce qu'on a vu plus haut, si l'une des équations admet une intégrale singulière, il en est de même de l'autre : si l'équation (5) admet une intégrale singulière du type (C_0) ou du type (C_1) , l'équation (5') admettra une intégrale singulière du même type, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie comme nous le verrons plus loin.

Considérons, par exemple, l'équation de Clairaut

$$(9) \quad y - px + f(p) = 0;$$

les équations

$$X = p, \quad Y = px - y, \quad P = x,$$

qui donnent

$$x = P, \quad y = PX - Y, \quad p = X,$$

définissent une T. C. (transformation de Legendre) qui n'est autre qu'une transformation par polaires réciproques relativement à la parabole

$$y - x^2 = 0.$$

Elle conduit de l'équation (9) à l'équation

$$(10) \quad Y - f(X) = 0.$$

L'équation (10) admet comme intégrales :

1° Les M_1^0 (intégrale générale) ayant pour support

ponctuel un point quelconque (X_0, Y_0) de la courbe (C) représentée par l'équation (10). Il leur correspond la famille de droites

$$x = P, \quad y = PX_0 - f(X_0) \quad (p = X_0),$$

qui donne l'intégrale générale de l'équation (9);

2° Une $M_1^!$ (intégrale singulière) ayant pour support ponctuel la courbe (C)

$$X = X, \quad Y = f(X), \quad P = f'(X).$$

Il lui correspond la courbe

$$x = f'(X), \quad y = Xf'(X) - f(X) \quad (p = X),$$

qui est l'intégrale singulière de l'équation de Clairaut.

7. Nous allons déduire des considérations précédentes un procédé d'intégration de l'équation

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène,

$$[f, \lambda] \equiv \frac{\partial f}{\partial p} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + p \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0,$$

admet comme on sait deux intégrales distinctes, dont l'une est f . Soit $X(x, y, p)$ une intégrale de cette équation distincte de f . Nous supposons naturellement que f contient p ; comme nous venons d'intégrer l'équation de Clairaut, nous supposerons de plus que l'équation (5) n'est pas une équation de ce type. On aura donc

$$\frac{\partial f}{\partial p} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0,$$

et par suite,

$$\frac{\partial X}{\partial p} \neq 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0.$$

Les fonctions X et f étant en involution, il leur correspond une fonction $P(x, y, p)$ et une seule telle que les équations

$$(6) \quad \lambda = \lambda(x, y, p), \quad Y = f(x, y, p), \quad P = P(x, y, p)$$

définissent une T. C. Si nous appliquons cette T. C. à l'équation (5), l'équation transformée s'écrit

$$Y = 0.$$

Cette dernière équation admet pour intégrales :

1° Les M_1^0 définies par les équations

$$Y = 0, \quad \lambda = a,$$

où a est une constante arbitraire. On en déduit, pour l'équation (5), une famille d'intégrales à un paramètre, représentée par les équations

$$f(x, y, p) = 0, \quad \lambda(x, y, p) = a;$$

c'est l'intégrale générale.

2° L'intégrale singulière

$$Y = 0, \quad P = 0$$

à laquelle correspond, pour l'équation (5), l'intégrale singulière

$$f(x, y, p) = 0, \quad P(x, y, p) = 0.$$

à condition, bien entendu, que ces équations soient compatibles.

8. Il nous faut maintenant présenter quelques remarques importantes sur la correspondance établie entre les deux plans (x, y) et (X, Y) par les équations (6).

En identifiant les deux membres de l'équation fonda-

mentale

$$dY - P dX = z(dy - p dx)$$

on a les relations

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial p} - P \frac{\partial X}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} - P \frac{\partial X}{\partial y} = z, \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - P \frac{\partial X}{\partial x} = -z p. \end{array} \right.$$

C'est en partant des relations (11) que l'on établit les identités classiques de la théorie des T. C.; on en tire aussi sans difficulté la relation

$$\frac{D(X, Y, P)}{D(x, y, p)} = z^2,$$

qui montre bien pourquoi l'hypothèse

$$(12) \quad z \neq 0$$

est essentielle dans toute cette théorie.

Soit alors (X_0, Y_0, P_0) un élément du plan (X, Y) . Si les équations

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(x, y, p) = X_0, \quad Y(x, y, p) = Y_0, \\ P(x, y, p) = P_0 \end{array} \right.$$

n'ont pas pour conséquence la nullité de z , elles définissent en général un ou plusieurs éléments du plan (x, y) . Mais si elles sont incompatibles avec (12), deux cas singuliers pourront se produire :

1° Les équations (13) sont incompatibles, et alors à l'élément (X_0, Y_0, P_0) ne correspond aucun élément du plan (x, y) ;

2° Les équations (13) forment un système indéterminé; alors, à l'élément considéré, correspondent une infinité d'éléments, formant ou non une multiplicité. Par exemple, à l'élément $(0, 0, 0)$ du plan (X, Y) , la

T. C. définie par les équations

$$Y = y^2 - x^2 - 2\rho xy, \quad X = x + \rho y, \quad P = -2x$$

fait correspondre dans le plan (x, y) la m_1^0 qui a pour support ponctuel l'origine; on a ici

$$z = 2y.$$

de sorte que z s'annule bien pour tout élément de cette m_1^0 .

On voit de même qu'il peut y avoir des M_1 du plan (X, Y) auxquelles ne corresponde aucune m_1 du plan (x, y) . Considérons, par exemple, la T. C. définie par les équations

$$Y = -x + \frac{2y}{\rho} + \rho^2, \quad X = \frac{1}{\rho^2} + 2\rho, \quad P = \rho$$

$$\left(z = \frac{1}{\rho} \right),$$

d'où l'on tire

$$x = -Y - 2PX - 3P^2, \quad y = P^2(X - 2P), \quad \rho = P;$$

à la M_1

$$Y = 0, \quad P = 0$$

ne peut correspondre comme multiplicité; car comme on a ici

$$zP = 1,$$

il en résulte

$$[P, Y] = 1.$$

On trouve en effet qu'il correspond à cette multiplicité l'élément unique $(0, 0, 0)$ du plan (x, y) .

Ces considérations offrent un intérêt particulier pour l'étude de la correspondance entre les intégrales singulières. Remarquons à ce sujet que l'extension donnée à la notion d'enveloppe entraîne, comme nous l'avons fait observer déjà, une extension de la notion d'inté-

(144)

grale singulière. Prenons, par exemple, les cercles ayant pour centre l'origine; leur equation différentielle

$$x - \rho y = 0$$

n'a pas d'intégrale singulière au sens ordinaire. Cependant la T. C.

$$Y = x + \rho y \quad X = y \sqrt{1 - \rho^2}, \quad P = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho}$$

met en évidence une intégrale singulière du type (\mathcal{C}_0) , composée des deux éléments communs à tous ces cercles aux points cycliques.

(A suivre.)