NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES BOULIGAND

Introduction à l'étude de la mécanique et de ses principes

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 93-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__93_0>

[R6]

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DE LA MÉCANIQUE ET DE SES PRINCIPES;

Par M. Georges BOULIGAND.

(*Suite.*)

6. Invoquons le principe de causalité et cherchons à déduire, des lois de Képler, *des caractères cinématiques communs* aux mouvements des différentes planètes. En remontant à ces caractères communs, nous remonterons aux causes de ces mouvements, nous mettrons en évidence les forces qui les produisent.

De la deuxième loi de Képler, nous déduisons d'abord que l'accélération de chaque planète est portée par la droite qui la joint au Soleil. En effet, soient S le Soleil, P la planète, PV son vecteur vitesse, SH un vecteur équipollent. Le parallélogramme SPVH a une aire constante. Soit K la projection de S sur PV. On a

$$SK \times SH = \alpha^2.$$

Pour déduire le point H de la droite PV, on tracera un cercle de centre S, de rayon α, on prendra le pôle de cette droite et l'on fera tourner ce pôle d'un angle droit autour de S; de là, on déduit aisément que la tangente à l'hodographe (lieu du point H) est parallèle à SP, qui porte, par suite, l'accélération de P.

De la première loi de Képler, on déduit que, pour une planète déterminée, l'accélération est en raison inverse du carré de la distance. En effet, le lieu de K est la circonférence principale de l'ellipse décrite par P. On en déduit le lieu de H par une inversion et une rotation d'un droit autour de O. L'hodographe est donc aussi une circonférence : soit σ l'abscisse curviligne de H sur cette courbe. L'accélération est $\frac{d\sigma}{dt}$ ou $\frac{d\sigma}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$, en appelant θ l'angle de SP avec un rayon vecteur fixe, que nous prenons pour axe polaire. Nous avons, d'après la deuxième loi de Képler,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \alpha^2.$$

Or $d\theta$ est l'angle de contingence de l'hodographe, $\frac{d\sigma}{d\theta}$ est son rayon de courbure, qui a une valeur constante R. L'accélération est donc égale à

$$\frac{\alpha^2 \mathrm{R}}{r^2};$$

elle est d'ailleurs dirigée dans le sens PS.

Étudions maintenant les conséquences de la troisième loi de Képler. Soient a, b les demi-axes de la trajectoire, le cercle décrit par K a pour rayon a, la puissance de S par rapport à ce cercle est $-b^2$. Le rayon R de l'hodographe est donné par

$$\frac{\mathrm{R}}{a} = \frac{\alpha^2}{b^2},$$

car ce cercle est égal à un cercle inverse, par rapport à O, du cercle décrit par K. Or nous avons

$$\frac{2\pi ab}{\mathrm{T}} = \alpha^2.$$

L'accélération qui sollicite chaque planète est donc de la forme

$$\frac{\mu}{r^2}$$

en posant

$$\mu = \alpha^2 R = \frac{\alpha^4 a}{b^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Puisque $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes, d'après la troisième loi de Képler, le coefficient μ est aussi le même.

La méthode précédente, due à M. Niewenglowski, nous donne donc des caractères cinématiques communs aux mouvements des différentes planètes, caractères qui peuvent se résumer ainsi :

Chaque planète possède une accélération dirigée vers le Soleil, et d'intensité $\frac{\mu}{r^2}$, le coefficient μ étant le même pour toutes les planètes.

Ces caractères communs portent sur l'accélération de chaque planète. D'où cette idee, que *l'accélération d'un mouvement est liée intimement aux causes de ce mouvement.*

Dès lors, si nous envisageons l'hypothèse que le mouvement des planètes autour du Soleil est le résultat d'une certaine action du Soleil sur chacune d'elles, les consequences précédentes des lois de Képler militent singulièrement en faveur de cette hypothèse.

Sans enfreindre le principe de symétrie, on ne peut concevoir une action du Soleil sur une planète sans qu'elle s'exerce suivant la droite joignant ces astres. Or l'accélération de la planète admet cette droite pour support et elle est uniquement fonction de la distance des deux astres. Il est naturel de penser qu'il existe une relation simple entre cette accélération et l'action supposée du Soleil sur la planète.

7. Mais si notre esprit se réclame du principe de symétrie, il ne saurait admettre l'absence de réciprocité. Comment supposer que le Soleil exerce une action

sur les planètes, sans penser en même temps que les planètes influencent le Soleil, et s'influencent mutuellement?

Mais alors, n'est-il pas possible, par ces influences mutuelles, d'expliquer les écarts que l'on observe entre les lois de Képler et les lois réelles du mouvement? L'exactitude approchée des lois de Képler résulterait d'une prépondérance des actions solaires vis-à-vis des actions planétaires mutuelles, et l'intervention simultanée de ces actions, participant d'une loi commune, fournirait très exactement la synthèse des mouvements d'ensemble du système solaire.

Essayons donc de faire intervenir l'ensemble des actions de chaque planète sur les autres corps du système solaire, et *admettons que toutes ces actions s'exercent indépendamment les unes des autres*. Comment caractériser l'action d'une planète déterminée? Chaque planète joue, par rapport à ses satellites, le rôle d'un soleil. Pour ces satellites, situés à petite distance de la planète, l'action de cette dernière est prépondérante, et l'on vérifiera grossièrement les lois de Képler par rapport à trois axes de directions fixes, dont l'origine est proche de la planète. La planète imprime donc à un point, situé à la distance r' de cet astre, une accélération dirigée vers elle et égale à $\frac{\mu'}{r'^2}$ (nous négligeons l'accélération d'entraînement, ce qui est admissible, à cause de la faible durée de la révolution des satellites vis-à-vis de celle de la planète autour du Soleil).

Cela posé, pour confronter, avec l'observation, la dernière hypothèse qui vient d'être formulée, nous aurons à résoudre le problème général suivant :

Soit un système d'axes $O_1x_1y_1z_1$, dont les directions sont invariables par rapport aux étoiles fixes, mais dont nous évitons, pour le moment, de spécifier l'origine O_1. Soient $n+1$ points

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad \ldots,\quad P_n,$$

où P_0 (par symétrie, et non plus S) représente le Soleil, et $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les diverses planètes ou même satellites. Désignons par r_{ik} la distance P_iP_k, et admettons que l'accélération de P_i soit la somme géométrique de n vecteurs, portés par les n droites P_iP_k $(K \neq i)$ et de modules respectifs $\frac{\mu_i}{r_{ik}^2}$. Envisageons alors le problème de cinématique pure, qui consiste à étudier, dans ces conditions, les mouvements de ces n points, et cherchons si, pour un choix convenable des constantes μ_i et des constantes d'intégration, on parvient à reconstituer les mouvements d'ensemble du système solaire.

L'expérience répond affirmativement. Si le problème précédent n'est pas soluble analytiquement d'une manière complète, du moins on peut en trouver une solution approchée, et celle-ci s'accorde avec les faits observés. On peut montrer de plus que le centre des distances proportionnelles des points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ avec les coefficients $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ possède une accélération nulle. Pour cela, mettons les équations qui définissent le mouvement de ces différents points sous forme vectorielle [1] :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2P_0}{dt^2} &= \qquad\qquad\qquad - \mu_1\frac{P_1-P_0}{r_{10}^3} + \mu_2\frac{P_2-P_0}{r_{20}^3} + \ldots + \mu_n\frac{P_n-P_0}{r_{n0}^3},\\
\frac{d^2P_1}{dt^2} &= \mu_0\frac{P_0-P_1}{r_{10}^3} \qquad\qquad\qquad + \mu_2\frac{P_2-P_1}{r_{12}^3} + \ldots + \mu_n\frac{P_n-P_1}{r_{1n}^3},\\
\frac{d^2P_2}{dt^2} &= \mu_0\frac{P_0-P_2}{r_{20}^3} + \mu_1\frac{P_1-P_2}{r_{12}^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n\frac{P_n-P_2}{r_{2n}^3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d^2P_n}{dt^2} &= \mu_0\frac{P_0-P_n}{r_{n0}^3} + \mu_1\frac{P_1-P_n}{r_{n1}^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_{n-1}\frac{P_{n-1}-P_n}{r_{n-1,n}^3}.
\end{aligned}$$

(1) Il n'est pas nécessaire, pour suivre ce calcul, d'être *rompu*

On déduit immédiatement de ces équations

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \ldots + \mu_n P_n) = 0,$$

relation qui exprime que le centre des distances proportionnelles (¹) précédemment cité a une accélération nulle par rapport aux axes $O_1 x_1 y_1 z_1$. D'après le théorème de Coriolis, nous pouvons d'ailleurs, sans altérer les accélérations de P_0, P_1, ..., P_n, substituer au trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$ un trièdre $O_2 x_2 y_2 z_2$, animé par rapport au premier d'une translation rectiligne et uniforme.

D'après cela, on peut prendre pour origine O_1 du

à la pratique des opérations vectorielles. Le lecteur comprendra immédiatement le sens des notations ci-dessus par les remarques suivantes : le vecteur $P_i P_k$ est égal à $OP_k - OP_i$, quel que soit le point O. On peut donc l'écrire $P_k - P_i$ en sous-entendant le point O. De la même manière, le vecteur vitesse et le vecteur accélération d'un point P sont respectivement les dérivées géométriques première et seconde, par rapport au temps, du vecteur OP, quel que soit le point fixe O. On peut donc les représenter respectivement par $\frac{dP}{dt}$ et $\frac{d^2P}{dt^2}$. Enfin la notation $\mu_i \frac{P_i - P_k}{r_{ik}^3}$ représente le produit du vecteur $P_k P_i$ (ou $P_k - P_h$) par la quantité scalaire $\frac{\mu_i}{r_{ik}^3}$; ce produit est un vecteur porté par la droite $P_i P_k$ et dont l'intensité s'obtient en multipliant par $\frac{\mu_i}{r_{ik}}$ celle de $P_i - P_k$; cette intensité est donc $\frac{\mu_i}{r_{ik}}$.

(¹) Ici encore, l'élève n'aura aucune peine à établir que si la somme $\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_n$ n'est pas nulle, on peut écrire l'égalité vectorielle

$$(E) \quad \mu_0 OP_0 + \mu_1 OP_1 + \ldots + \mu_n OP_n = (\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_n) OG,$$

le point G ayant une position indépendante de O. On peut donc encore sous-entendre O et écrire

$$\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_n P_n = (\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_n) G.$$

Le point G défini par l'équation (E) n'est autre que le centre des distances proportionnelles. On le verra en projetant sur trois axes trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$ le centre des distances proportionnelles des corps P_0, P_1, ..., P_n du système solaire, affectés des coefficients respectifs μ_0, μ_1, ..., μ_n : ce point est, nous l'avons déjà dit, très voisin du Soleil.

8. Ayant ainsi réalisé, par approximations successives, une synthèse satisfaisante des mouvements du système solaire, nous allons introduire les concepts de *force* et de *masse*. A cet effet, reprenons les équations vectorielles qui déterminent les accélérations de P_0, P_1, ..., P_n et considérons le tableau carré obtenu en supprimant, dans leurs seconds membres, les signes d'addition; à vrai dire, il manque, dans ce tableau, les termes de la diagonale principale; écrivons à leur place des zéros. Cela posé, si nous multiplions tous les éléments de la première ligne par μ_0, ceux de la seconde par μ_1, ..., etc., nous transformons ce tableau en un tableau symétrique gauche, dont les vecteurs sont proportionnels aux accélérations, et se présentent avec ce caractere de réciprocité qui nous permettra d'affirmer: deux points exercent l'un sur l'autre des actions égales et directement opposées. Nous dirons donc que chacun de ces vecteurs représente une *force* et que les coefficients μ_0, μ_1, ..., μ_n sont les *masses* de P_0, P_1, ..., P_n; la masse est donc une quantité scalaire, constante pour chacun des corps considérés. Les forces que nous venons d'introduire correspondent aux différentes accélérations. D'une accélération, on déduit la force correspondante en multipliant cette accélération par la masse du point qu'elle affecte.

Les forces provenant de l'action mutuelle de deux corps du système seront, d'après ce qui précède, en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.

En résumé, pour élaborer la synthèse précédente. nous avons dû admettre les principes suivants :

1° *Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* — Entre deux points s'exercent des forces représentant l'action de chacun de ces points sur l'autre ; ces forces sont égales et directement opposées.

2° *Principe de la proportionnalité des forces aux accélérations.* — Soit une force $\vec{F}$, agissant sur un point de masse m. Elle lui imprime une accélération $\vec{\gamma}$, liée à $\vec{F}$ par

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}.$$

3° *Principe de l'indépendance des effets des forces.* — Supposons que des forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ..., agissant isolément sur un point de masse m, lui communiquent respectivement les accélérations $\vec{\gamma_1}$, $\vec{\gamma_2}$, ... L'action simultanée de ces forces sur le point lui communique une accéleration égale à la somme géométrique des précédentes.

A partir de ces principes et de l'hypothèse que les forces mutuelles d'attraction sont en raison inverse du carré des distances, nous pourrons reconstituer les mouvements du système solaire sans avoir à vaincre d'autres difficultés que des difficultés d'intégration. Il suffira pour cela de nous donner les positions de ses divers points et leurs vitesses à un même instant, le calcul permettra alors de déterminer leur mouvement ultérieur.

9. Pour obtenir des solutions, même approchées, de systèmes différentiels aussi complexes que le précédent, les analystes ont dû s'attaquer d'abord à des sys-

tèmes de même nature et d'un moins grand nombre d'équations. Le plus simple qui se puisse concevoir est celui qui est fourni par une seule équation vectorielle

$$\vec{F} = m\vec{\gamma},$$

où nous supposons que m est un coefficient donné, que $\vec{\gamma}$ est l'accélération d'un point P par rapport à un système de référence déterminé (qu'on peut caractériser par un système d'axes $O_1x_1y_1z_1$), et que $\vec{F}$ est donné à chaque instant en fonction de la position du point P et de sa vitesse. Ici, nous simplifions d'un côté et nous généralisons de l'autre en augmentant la complexité des caractères de dépendance de $\vec{F}$. Cette étude, purement abstraite, de l'équation

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = m\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2},$$

constitue ce que l'on appelle couramment *la Dynamique du point matériel.* Elle a un double intérêt : elle montre, dans les cas les plus simples, la nature des difficultés analytiques à vaincre; de plus, nous le verrons plus loin, elle est susceptible d'applications concrètes, en permettant de reconstituer, avec une approximation suffisante, certains mouvements voisins de l'écorce terrestre.

10. A un point de vue abstrait, également, le mathématicien peut se proposer d'étudier la question suivante, qui constitue *la Dynamique des systèmes de points matériels.*

Soient des points, en nombre fini, $P_0, P_1, \ldots, P_n$ affectés de coefficients $m_0, m_1, \ldots, m_n$. Étudier leurs mouvements par rapport à un système de référence déterminé, d'après les équations

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
m_0 \dfrac{d^2 P_0}{dt^2} = \vec{\Phi}_0 \qquad + \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \ldots + \vec{F}_{0,n-1} + \vec{F}_{0,n}, \\
m_1 \dfrac{d^2 P_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_1 + \vec{F}_{10} \qquad + \vec{F}_{12} + \ldots + \vec{F}_{1,n-1} + \vec{F}_{1,n}, \\
m_2 \dfrac{d^2 P_2}{dt^2} = \vec{\Phi}_2 + \vec{F}_{20} + \vec{F}_{21} \qquad + \ldots + \vec{F}_{2,n-1} + \vec{F}_{2,n}, \\
\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m_n \dfrac{d^2 P_n}{dt^2} = \vec{\Phi}_n + \vec{F}_{n0} + \vec{F}_{n1} + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_{n,n-1}
\end{array}
\right.
$$

Par definition, $\vec{\Phi}_k$ est la *résultante des forces extérieures* appliquées au point P_k, et chaque vecteur $\overline{F}_{ik}$ est l'action du point P_k sur le point P_i. Nous supposons que les $\vec{F}_{ik}$ satisfont au principe de l'egalité de l'action et de la réaction, c'est-à-dire forment un tableau symétrique gauche.

Ce nouveau système est susceptible d'une complexite plus grande que celui fournissant la synthèse des mouvements du monde solaire : elle se revele par la presence des termes $\vec{\Phi}_0$, $\vec{\Phi}_1$, ..., $\vec{\Phi}_n$, auxquels nous avons donne le nom de *forces extérieures*. Elle réside également dans le fait que l'expression analytique des $\vec{F}_{ik}$ peut se présenter sous une forme notablement différente de celle qu'elle revêt dans le système (1).

Remarquons d'ailleurs que le nominalisme actuel peut être étayé par des considérations concrètes : pour étudier, en première approximation, le mouvement d'un système tel que celui qui est formé par Jupiter et l'ensemble de ses satellites, nous pouvons regarder l'action du Soleil comme prépondérante vis-à-vis de celles des autres planètes. Les divers points de notre système partiel seront soumis alors à deux espèces de forces :

1° Les forces extérieures, qui sont l'action du Soleil sur chaque astre du système (réduit à un point);

2° Les forces intérieures, résultat des attractions mutuelles de la planète et de ses satellites.

Pour faire la synthèse des mouvements du système considéré, nous serons amenés à écrire un système de la forme (2).

11. Voici quelques propriétés générales des systèmes de la forme (2) qui nous seront utiles dans la suite. En additionnant membre à membre toutes les équations de ce système, il vient

$$m_0 \frac{d^2 P_0}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 P_1}{dt^2} + \ldots + m_n \frac{d^2 P_n}{dt^2} = \vec{\Phi}_0 + \vec{\Phi}_1 + \quad + \vec{\Phi}_n;$$

ou encore, en appelant G le centre des distances proportionnelles de nos points, affectés des coefficients $m_0, m_1, \ldots, m_n$,

$$(3) \qquad (m_0 + m_1 - \ldots - m_n) \frac{d^2 G}{dt^2} = \vec{\Phi}_0 - \vec{\Phi}_1 + \ldots - \vec{\Phi}_n.$$

L'accélération du mouvement du point G est donc la même que si l'on faisait agir, sur la masse totale concentrée en ce point, la résultante des forces extérieures.

Si, pour le système considéré, il se trouve que cette résultante ne dépende, à chaque instant, que des coordonnées de G et de sa vitesse, l'équation (3) permettra d'étudier le mouvement de G, indépendamment de l'ensemble du système.

Mais on peut encore donner à l'énoncé précédent une autre forme. Introduisons à cet effet les quantités de mouvements des points P_0, P_1, ..., P_n. Nous entendons par là les vecteurs

$$m_0 \frac{dP_0}{dt}, \quad m_1 \frac{dP_1}{dt}, \quad \ldots, \quad m_n \frac{dP_n}{dt}.$$

Ils forment un système, dont nous appellerons $\vec{\rho}$ la « résultante de translation », et $\vec{\sigma}$ le « moment résultant » par rapport à un point fixe dans notre système de référence ([1]). Introduisons la résultante de translation $\vec{R}$ et le moment résultant $\vec{S}$ (par rapport au même point) des forces extérieures. L'égalité précédente, résultant de l'addition des équations du système (2), peut encore s'écrire

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{R}. \tag{3 bis}$$

Proposons-nous de même d'établir l'équation vectorielle

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{S}. \tag{4}$$

A cet effet, nous utiliserons la remarque suivante : Prendre le moment par rapport à O de la quantité de mouvement de P, c'est-à-dire du vecteur $m\frac{dP}{dt}$, c'est procéder à une opération vectorielle sur les deux vecteurs OP et $m\frac{dP}{dt}$. Nous indiquerons cette opération par la notation

$$\mathrm{OP} \wedge m \frac{dP}{dt}.$$

([1]) On donne encore à $\vec{\sigma}$ le nom de *moment cinétique*. La résultante cinétique $\vec{\rho}$ n'est autre que la quantité de mouvement du centre de gravité, donc de la masse totale.

Les propriétés de cette opération, couramment dénommée *produit géométrique* (ou *vectoriel*), sont les suivantes :

1° Elle n'est pas commutative, l'échange des facteurs modifie le sens du vecteur produit, sans modifier sa direction ni sa grandeur (ou encore, le multiplie par — 1);

2° Elle est distributive par rapport à l'addition vectorielle (théorème de Varignon), et par suite la dérivation géométrique d'un produit de cette nouvelle espèce s'opère par le même mécanisme que celle des produits, en Algèbre.

Cela posé, multiplions, au sens précédent, les équations (2) respectivement par OP_0, OP_1, ..., OP_n et ajoutons. Remarquons que

$$\mathrm{OP} \wedge m \frac{d^2 \mathrm{P}}{dt^2} = m \left(\mathrm{OP} \wedge \frac{d^2 \mathrm{P}}{dt^2} \right)$$
$$= m \left[\frac{d}{dt} \left(\mathrm{OP} \wedge \frac{d\mathrm{P}}{dt} \right) - \frac{d\mathrm{P}}{dt} \wedge \frac{d\mathrm{P}}{dt} \right].$$

Or le produit géométrique de deux vecteurs de même direction est nul (car c'est, en somme, le moment d'un vecteur par rapport à un point de son support), donc on a

$$\mathrm{OP} \wedge m \frac{d^2 \mathrm{P}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\mathrm{OP} \wedge m \frac{d\mathrm{P}}{dt} \right).$$

Dans l'addition, les moments des forces intérieures, deux à deux opposés, s'eliminent, et l'on obtient donc bien, comme nous l'avions annoncé, l'équation (4) : elle exprime le *théorème du moment cinétique*.

Les équations (3 *bis*) et (4) équivalent à six équations ordinaires : ce sont les six équations universelles du mouvement des systèmes de points. Pour l'équilibre par rapport au système de référence choisi, on aura les six conditions déduites de

$$\vec{R} = 0, \qquad \vec{S} = 0.$$

Mais est-il nécessaire de le redire : tout ce qui a été exposé dans les nos 6 et 7 est de nature purement mathématique. Nous avons seulement trouvé une classe de phénomènes s'adaptant à ce cadre : ceux de la gravitation. Il y a un chemin notable à parcourir pour être en mesure d'appliquer des systèmes de la forme (2) à la synthèse de phénomènes d'un autre ordre.

12. Quoi qu'il en soit, il était commode, pour notre exposition, d'étudier les propriétés abstraites qui précèdent. Avant d'aller plus loin, appliquons au système solaire les équations vectorielles

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{R}, \qquad \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{S}.$$

Dans ce cas, le système (2) se réduit au système (1) : il n'y a pas de forces extérieures. Donc

$$\vec{R} = 0, \qquad \vec{S} = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\vec{\rho}$ et $\vec{\sigma}$ sont constants : la constance de $\vec{\rho}$, c'est l'absence d'accélération du point G, ou encore la possibilité de prendre ce point pour origine des axes auxquels on rapporte les mouvements du monde solaire. Dire, comme on le fait parfois, que le centre du système solaire est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, n'est qu'un abus d'interprétation des équations qui précèdent : ainsi que nous l'avons déjà dit, cette question ne pourra être résolue que par des observations précises, opérées sur les déplacements des étoiles les plus voisines du Soleil.

13. Dans les numéros qui précèdent, nous avons échafaudé une théorie purement mathématique. Les forces que nous y avons introduites sont des êtres abstraits, dont nous supposons connue l'expression : chaque force est le produit d'une masse par une accélération. Nous admettons, à titre de postulat, que la masse est indépendante du système de référence. Par contre, si l'on modifie le système de référence, il faut modifier l'accélération de chaque point P_0, P_1, ..., P_n. Dans ces conditions, les forces seront elles-mêmes modifiées. Pour étudier le mouvement par rapport au nouveau système, on y évaluera les accélérations relatives des points P_0, P_1, ..., P_n. On les déduit des accélérations anciennes au moyen du théorème de Coriolis. Prenons par exemple le cas d'un seul point P, dont le mouvement par rapport à un trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$ est régi par l'équation

$$\vec{F}_1 = m\vec{\gamma}_1.$$

Considérons un autre trièdre $Oxyz$ en mouvement par rapport au premier, soit $\vec{\gamma}$ l'accélération de P par repport à ce trièdre; désignons par $\vec{\gamma}_e$ l'accélération d'entraînement, par $\vec{\gamma}_c$ l'accélération complémentaire. D'après le théorème de Coriolis,

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma} + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c.$$

On peut donc écrire l'équation vectorielle définissant le mouvement du point P par rapport au trièdre $Oxyz$ sous la forme

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}_1 - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c;$$

on voit aussi comment il faut modifier l'expression de la force $\overrightarrow{F_1}$: à cet effet, on la compose avec deux forces fictives, la *force centrifuge* $-m\overrightarrow{\gamma_e}$ et la *force centrifuge composée* $-m\overrightarrow{\gamma_c}$. Cette dernière disparaît lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

14. Plaçons-nous dans ce dernier cas, et supposons que l'origine des axes $Oxyz$ soit le point G, centre des distances proportionnelles, précédemment considéré, des points P_0, P_1, ..., P_n. Pour obtenir l'accélération de chacun de ces points dans le nouveau système, il suffit de faire la différence géométrique de leur accélération dans l'ancien système, et de l'accélération d'entraînement commune à tous ces points, c'est-à-dire celle de G dans l'ancien système. On peut donc considérer que le mouvement des points P_0, P_1, P_2, ..., P_n par rapport au système $Oxyz$ se produit sous l'action de forces dont la résultante s'obtient, pour chaque point, en corrigeant la même résultante pour l'ancien système d'une force égale au produit de la masse de ce point par l'accélération d'entraînement commune. Or, ces forces correctives ont une résultante passant par le point G [1]. Le moment résultant des forces correctives

[1] C'est le théorème de la coïncidence du centre des vecteurs parallèles et du centre des distances proportionnelles.

Soit un système formé de vecteurs parallèles, de résultante de translation non nulle. Si l'on fait varier la direction commune aux vecteurs du système sans changer leurs rapports algébriques, de manière que le support de chacun d'eux passe par un point fixe, le support du vecteur unique équivalent aux distances données passe par le centre des distances proportionnelles de ces points, affectés de coefficients qui sont entre eux comme les rapports des vecteurs du système.

par rapport au point G est donc nul. D'où cette importante proposition :

On peut appliquer le théorème du moment cinétique dans le mouvement par rapport au centre de gravité sans avoir à faire subir aux forces les modifications qu'exigerait un changement arbitraire de système de référence.

Ces préliminaires théoriques posés, nous pouvons aborder l'étude des données de la Mécanique terrestre.

(*A suivre.*)