J. HAAG

Sur un invariant intégral se rattachant à la mécanique statistique

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 301-302

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__301_0>

[R8]

SUR UN INVARIANT INTÉGRAL SE RATTACHANT A LA MÉCANIQUE STATISTIQUE;

Par M. J. HAAG.

Soit un système matériel dépendant de n paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Soit T son énergie cinétique, forme quadratique des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, par rapport au temps. Posons

$$(1) \qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En Mécanique statistique, on représente les différents états possibles du système par les points de l'espace E_{2n} ayant pour coordonnées $(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$, et l'on considère la probabilité pour qu'un état pris au hasard ait son point représentatif P situé dans un domaine donné comme proportionnel au volume V de ce domaine (*cf.* Jeans, *The dynamical theory of gases*, Chap. V). Pour qu'une telle hypothèse soit légitime, il faut évidemment qu'elle soit indépendante du choix des variables q_i. Autrement dit, si l'on fait un changement de variables quelconque

$$(2) \qquad y_i = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et si l'on pose

$$(3) \qquad x_i = \frac{\partial T}{\partial y'_i},$$

le point Q de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ doit décrire un volume V′ égal au volume V, quand P décrit V. C'est ce que je me propose de vérifier dans cette courte Note.

Il s'agit de prouver que le jacobien

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(p_1, p_2 \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)}$$

est égal à l'unité.

Remarquons d'abord que les y ne sont pas fonctions des p; donc, les éléments de J qui sont communs aux n dernières lignes et aux n premières colonnes sont nuls. Il s'ensuit que J est le produit des deux déterminants d'ordre n :

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots . x_n)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}, \qquad J'' = \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(q_1, q_2, \ldots, q_n)}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$a_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}.$$

On a

$$y'_i = \sum_k a_{ik} q'_k;$$

d'où, en résolvant par rapport aux q' et désignant par A_{ik} le coefficient de a_{ik} dans le développement de J'',

$$(4) \qquad q'_i = \frac{\sum A_{ki} y'_k}{J''}.$$

Nous avons maintenant

$$(5) \qquad x_i = \frac{\partial T}{\partial y'_i} = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial y'_i} = \sum \frac{A_{ik}}{J''} p_k.$$

Dès lors, on voit que J' est égal au déterminant adjoint de J'', divisé par J''^n; donc,

$$J' = \frac{J''^{n-1}}{J''^n} = \frac{1}{J''}.$$

D'où, J = 1. C. Q. F. D.