NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RAYMOND ESTÈVE

Sur la formule d'Holditch et les applications qu'on peut en déduire

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 284-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__284_1>

[O¹2a]

SUR LA FORMULE D'HOLDITCH ET LES APPLICATIONS QU'ON PEUT EN DÉDUIRE ;

PAR M. RAYMOND ESTÈVE,
Professeur au Lycée de Toulouse.

ÉTABLISSEMENT DE LA FORMULE. — Soit à résoudre le problème suivant :

Une droite ABC *se déplace dans un plan de façon* *que trois de ses points décrivent trois courbes fermées Γ_A, Γ_B, Γ_C et que la droite décrive un angle total $2k\pi$. Trouver la relation qui existe entre les aires limitées par les trois courbes.*

Soient $x = f(t)$, $y = g(t)$ les équations paramétriques de la courbe Γ_A, $f(t)$ et $g(t)$ étant des fonctions périodiques du paramètre t dont la période commune est T.

Prenons sur la droite mobile un sens positif, soit le sens ABC. Désignons par φ l'un quelconque des angles de Ox avec AC. Si x, y sont les coordonnées de A, x_1, y_1 celles de B, et x_2, y_2 celles de C, on a, en supposant les axes rectangulaires et en posant $\overline{AB} = l$ et $\overline{BC} = l'$,

$$\begin{cases} x_1 = x + l\cos\varphi, \\ y_1 = y + l\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + l'\cos\varphi, \\ y_2 = y_1 + l'\sin\varphi. \end{cases}$$

Lorsque t varie de t_0 par exemple à $t_0 + T$, le point A décrit entièrement la courbe Γ_A; les courbes décrites par B et C se fermeront, à condition que φ soit une fonction de t telle que l'on ait

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul.

A un sens de parcours f_A du point A sur la courbe Γ_A correspondent un sens de parcours f_B du point B sur Γ_B et un sens de parcours f_C du point C sur Γ_C. Posons

$$S_A = \int_{f_A} x\,dy, \qquad S_B = \int_{f_B} x_1\,dy_1, \qquad S_C = \int_{f_C} x_2\,dy_2.$$

Si, par exemple, Γ_A est une courbe sans points doubles, on sait que S_A est l'aire de cette courbe, affectée du signe *plus* ou *moins* suivant le sens de parcours f_A.

Nous allons établir la formule suivante, dite « formule d'Holditch » :

$$S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} + k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

On a

$$\begin{cases} x = x_1 - l\cos\varphi, \\ y = y_1 - l\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + l'\cos\varphi, \\ y_2 = y_1 + l'\sin\varphi; \end{cases}$$

$$dy = dy_1 - l\cos\varphi\, d\varphi, \qquad dy_2 = dy_1 + l'\cos\varphi\, d\varphi;$$

$$x\ dy = x_1\, dy_1 - l\ dy_1\cos\varphi - l\, x_1\cos\varphi\, d\varphi + l^2\ \cos^2\varphi\, d\varphi,$$

$$x_2\, dy_2 = x_1\, dy_1 + l'\, dy_1\cos\varphi + l' x_1\cos\varphi\, d\varphi + l'^2\cos^2\varphi\, d\varphi.$$

Multipliant les deux membres de la première des deux égalités précédentes par l', les deux membres de la deuxième par l et ajoutant membre à membre les égalités obtenues, on a

$$l' x\, dy + l x_2\, dy_2 = (l + l')x_1\, dy_1 + ll'(l + l')\cos^2\varphi\, d\varphi.$$

Or,

$$\overline{AB} = l, \qquad \overline{BC} = l', \qquad \overline{CA} = -(l + l').$$

On obtient

$$(1)\quad \overline{BC}\cdot x\, dy + \overline{CA}\cdot x_1\, dy_1 + \overline{AB}\cdot x_2\, dy_2 + \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cos^2\varphi\, d\varphi = 0.$$

En intégrant,

$$\overline{BC}\int_{t_0}^{t_0+T} x\, dy + \overline{CA}\int_{t_0}^{t_0+T} x_1\, dy_1 + \overline{AB}\int_{t_0}^{t_0+T} x_2\, dy_2 + \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2k\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$(2)\quad \begin{cases} S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} + k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0 \\ \text{(formule d'Holditch).} \end{cases}$$

Remarque I. — Supposons que le point A doive parcourir α fois la courbe Γ_A pour que les courbes Γ_B et Γ_C se ferment; de ce fait, α est le plus petit nombre entier positif pour que l'on ait

$$\varphi(t+\alpha T) = \varphi(t) + 2k\pi \qquad (k \text{ entier quelconque}).$$

Intégrons la relation (1) de t_0 à $t_0+\alpha T$; nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{BC}\int_{t_0}^{t_0+\alpha T} x\,dy + \overline{CA}\int_{t_0}^{t_0+\alpha T} x_1\,dy_1 \\ + \overline{AB}\int_{t_0}^{t_0+\alpha T} x_2\,dy_2 \\ + \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2k\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = 0.\end{aligned}$$

D'où la nouvelle formule :

$$(3) \quad \alpha\cdot\overline{BC}\cdot S_A + \overline{CA}\cdot S_B + \overline{AB}\cdot S_C + k\pi\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA} = 0.$$

Remarque II. — Intégrons la relation (1), de t_0 à t_1, où t_0 et t_1 sont quelconques :

$$\begin{aligned}\overline{BC}\int_{t_0}^{t_1} x\,dy + \overline{CA}\int_{t_0}^{t_1} x_1\,dy_1 \\ + \overline{AB}\int_{t_0}^{t_1} x_2\,dy_2 \\ + \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2\varphi\,d\varphi = 0.\end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_0) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0).$$

D'où la formule

$$\begin{aligned}\overline{BC}\int_{\text{arc }\alpha} x\,dy + \overline{CA}\int_{\text{arc }\beta} x_1\,dy_1 \\ + \overline{AB}\int_{\text{arc }\gamma} x_2\,dy_2 \\ + \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}(\varphi_1-\varphi_0) + \frac{1}{4}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot R\end{aligned}$$

en posant

$$R = \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0,$$

les arcs α, β, γ étant les arcs décrits respectivement par A, B, C lorsque le paramètre t varie de t_0 à t_1. La formule précédente peut s'écrire

$$(4)\quad \overline{BC}\cdot S_\alpha + \overline{CA}\cdot S_\beta + \overline{AB}\cdot S_\gamma + \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot R = 0.$$

Cette formule s'applique au cas général où les courbes décrites par A, B, C sont quelconques, fermées ou non. Les S représentent alors des intégrales de la forme $\int x\,dy$ prises le long de certains arcs et dans certains sens, ces derniers étant liés entre eux par le mouvement de la droite ABC.

Remarque III. — Si l'on a

$$\varphi_1 - \varphi_0 = k\pi$$

la formule (4) devient :

$$(5)\quad \overline{BC}\cdot S_\alpha + \overline{CA}\cdot S_\beta + \overline{AB}\cdot S_\gamma + k\frac{\pi}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA} = 0.$$

Applications de ces diverses formules. — I. *Relation de Stewart.* — Le mouvement de la droite ABC étant une rotation (de 2π) autour du point M, la formule (2) donne immédiatement la relation de Stewart :

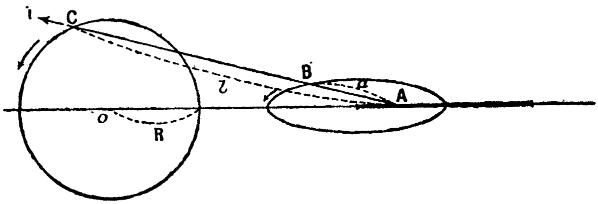
$$\overline{MA}^2 . BC + \overline{MB}^2 . CA + \overline{MC}^2 . AB + \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA} = 0.$$

II. *Aire de l'ellipse.* — Les points A et B décrivant deux droites rectangulaires, la même formule conduit à la valeur classique de l'aire de l'ellipse décrite par C.

III. *Système bielle-manivelle :* $AC = l$; $AB = a$. — On voit aisément que :

$S_A = 0$; $S_C = \pi R^2$;   variation de $\varphi = 0$;   d'où $k = 0$.

Fig. 1.



La formule (2) donne

$$S_B \cdot \overline{CA} + \pi R^2 \cdot \overline{AB} = 0;$$

d'où

$$S_B = \pi R^2 \frac{a}{l}.$$

Cela suppose B à gauche de A; si B était à droite de A, on aurait

$$S_B = -\pi R^2 \frac{a}{l}$$

La courbe décrite par B n'a qu'une boucle ; l'aire intérieure à cette boucle a pour valeur, dans tous les cas, $\pi R^2 \frac{a}{l}$.

IV. *Courbes déduites de la tractrice.* — En posant $AB = a$, on a

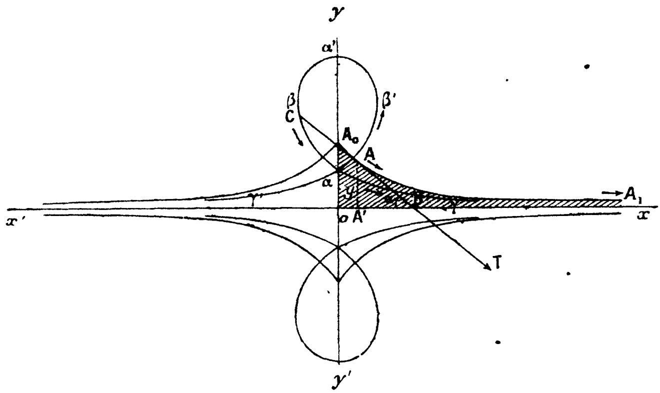
$$y = a \sin\alpha, \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\alpha, \qquad dy = a \cos\alpha \, d\alpha;$$

d'où

$$dx = -\frac{a \cos^2\alpha \, d\alpha}{\sin\alpha}, \qquad y \, dx = -a^2 \cos^2\alpha \, d\alpha,$$

et l'on en déduit facilement que l'aire de la surface couverte de hachures sur la figure est $\frac{\pi a^2}{4}$; l'aire intérieure à la courbe formée par les quatre branches a pour valeur πa^2.

Fig. 2.



Appliquons alors la formule (2) aux trois courbes décrites par A, B, C. On voit aisément que

$$S_A = -\pi a^2, \qquad S_B = 0,$$

car B décrit l'axe $x'Ox$.

On a donc ($k = 1$)

$$-\pi a^2 \cdot \overline{BC} + S_C \cdot \overline{AB} + \pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

Mais

$\overline{AB} = a$ (le sens AT coïncidant avec le sens AB),

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = a + \overline{BC};$$

d'où

$$S_C = \pi \overline{BC}(2a + \overline{BC}),$$

$S_C = 0$ pour $\begin{cases} \overline{BC} = 0 & \text{(les points B et C coïncident);} \\ \overline{BC} = -2a & \text{(les points B et C sont symétriques par rapport à A).} \end{cases}$

Il convient d'insister sur le cas où les points B *et* C

***sont de part et d'autre de* A. — La courbe Γ_C a alors plusieurs boucles, comme le montre la figure, construite dans le cas particulier où B et C sont symétriques par rapport à A. On voit aisément que l'on a**

$$S_C = -\pi l(2a - l)$$

en posant

$$BC = l, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{BC} = -l.$$

Sur la figure

$$S_C = 2 \,\text{aire}\, \alpha\beta\alpha'\beta' - 2 \,\text{aire}\, x'Ox\gamma\alpha\gamma'.$$

Pour B et C symétriques par rapport à A, $S_C = 0$, c'est-à-dire

$$\text{aire}\, \alpha\beta\alpha'\beta' = \text{aire}\, x'Ox\gamma\alpha\gamma'.$$

V. *Cardioïde.* — Nous déduirons plus loin ce cas, soit des épicycloïdes, soit des conchoïdes, mais nous allons l'étudier directement pour donner une application des formules (3) et (5).

Le point A décrit un cercle de rayon R, la droite BAC passe constamment par un point fixe de ce cercle et les points B et C sont de part et d'autre de A à des distances

$$AB = CA = 2R;$$

ils décrivent une cardioïde d'aire S.

La formule (3), appliquée pour $\alpha = 2$, $k = 1$ et

$$S_A = \pi R^2, \qquad S_B = S_C = S,$$

donne

$$S = 6\pi R^2;$$

la formule (5) ($k = 1$), où

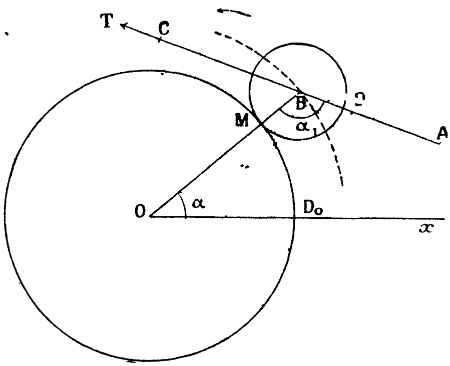
$$S_\alpha = \pi R^2 \qquad S_\beta + S_\gamma = S,$$

conduit au même résultat.

Application de la formule d'Holditch aux épicycloïdes et hypocycloïdes :

I. *Épicycloïdes.* — Soient R le rayon du cercle roulette et nR (n entier positif) le rayon du cercle base. La droite ABC, telle que A et C soient symétriques par rapport à B, est invariablement liée au cercle roulette. Les points A et C décrivent des épicycloïdes égales.

Fig. 3.



Soit φ l'un des angles de Ox avec AT, par exemple celui qui est nul lorsque D est en D_0. On a

$$\text{arc } D_0M = \text{arc } DM,$$

d'où

$$\alpha_1 = n\alpha$$

et

$$\varphi = \alpha + \alpha_1 = (n+1)\alpha;$$

d'autre part,

$$S_A = S_C, \quad S_B = \pi(n+1)^2R^2, \quad \overline{AB} = \overline{BC} = l, \quad \overline{CA} = -2l,$$

et la variation de φ est $2(n+1)\pi$ puisque α varie de 2π; k est donc égal à $n+1$. Il vient donc

$$S_A l + \pi(n+1)^2R^2(-2l) + S_A l + (n+1)\pi l.l(-2l) = 0$$

et l'on en tire

$$S_A = \pi(n+1)[l^2 + (n+1)R^2].$$

Remarque. — Si $l > R$, S_A est une somme algébrique d'aires, l'épicycloïde présentant plusieurs boucles.

Si $l \leqq R$, l'épicycloïde n'a qu'une boucle et S_A est l'aire intérieure.

Cas particulier : $l = R$. — On a alors

$$S_A = \pi(n+1)(n+2)R^2,$$

et l'aire comprise entre l'épicycloïde et le cercle base est

$$S = S_A - \pi n^2 R^2 = \pi R^2(3n+2);$$

l'aire comprise entre le cercle base et l'arceau d'épicycloïde compris entre deux points de rebroussement vaut enfin

$$s = \frac{S}{n} = 3\pi R^2 + \frac{2\pi R^2}{n}.$$

Pour n égal à 1, on retrouve la cardioïde et à la limite pour n infini, on obtient l'aire de l'arceau de cycloïde.

II. *Hypocycloïdes.* — R étant le rayon du cercle roulette et nR celui du cercle base, on trouve, comme précédemment, la formule

$$S_A = \pi(n-1)[(n-1)R^2 - l^2]$$

et, dans le cas particulier $l = R$,

$$S_A = \pi(n-1)(n-2)R^2, \qquad S = \pi R^2(3n-2),$$

$$s = \frac{S}{n} = 3\pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{n}.$$

Remarque. — Soient deux cercles de même rayon R roulant sur un cercle de rayon nR, l'un extérieurement, l'autre intérieurement; un point quelconque du cercle extérieur décrit une épicycloïde, un point quelconque du cercle intérieur une hypocycloïde et l'on a

$$s_e = 3\pi R^2 + \frac{2\pi R^2}{n}, \qquad s_h = 3\pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{n};$$

la somme $s_e + s_h$ égale à $6\pi R^2$ est donc indépendante de n.

Application de la formule d'Holditch au cas où la droite ABC passe constamment par un point fixe O :

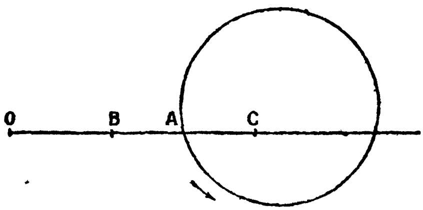
1° *Le point* A *décrivant la courbe* Γ_A, *la droite* OA *ne fait aucun tour complet autour de* O.

Γ_A étant une courbe fermée, il en est de même de Γ_B et Γ_C; on a ici $k = 0$, d'où

$$S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} = 0.$$

Dans le cas particulier où B et C sont symétriques par

Fig. 4.



rapport à A, l'ensemble des deux courbes Γ_B et Γ_C constitue la conchoïde de Γ_A et

$$S_B + S_C = 2 S_A.$$

Si le point A décrit un cercle,

$$S_B + S_C = 2\pi R^2.$$

2° *Le point* A, *décrivant la courbe* Γ_A, *la droite* OA *fait* k *tours autour de* O.

Γ_A étant une courbe fermée, Γ_B et Γ_C sont aussi des courbes fermées; on a

$$S_A.\overline{BC} + S_B.\overline{CA} + S_C.\overline{AB} \pm k\pi\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0,$$

$+$ ou $-$ suivant que la droite OA tourne dans le sens trigonométrique ou en sens contraire.

Dans le cas particulier où B et C sont symétriques par rapport à A, on obtient aisément

$$S_B + S_C = 2\left(S_A \pm k\pi\overline{AB}^2\right).$$

En supposant que Γ_A soit un cercle décrit par A dans le sens trigonométrique et O un point intérieur au cercle, on a $k = 1$ et l'on doit prendre le signe $+$.

$$S_B + S_C = 2\pi\left(R^2 + \overline{AB}^2\right)$$

3° *Le point* O *est un point simple de* Γ_A.

Il est aisé de constater que les courbes décrites par B et C se ferment si le point A décrit deux fois la courbe Γ_A. La formule à appliquer est la suivante :

$$2S_A.\overline{BC} + S_B.\overline{CA} + S_C.\overline{AB} + k\pi\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0.$$

Si B et C sont symétriques par rapport à A, les points B et C décrivent la même courbe et dans le même sens. En faisant dans la formule précédente

$$\overline{CA} = \overline{AB}, \qquad \overline{BC} = -2\overline{AB} \qquad \text{et} \qquad S_B = S_C,$$

on trouve

$$S_B = 2S_A + k\pi\overline{AB}^2.$$

Exemple : Conchoïde du cercle. — La courbe Γ_A est un cercle ; $k = 1$. Trois cas à distinguer

a. $AB < 2R$ (R étant le rayon du cercle Γ_A). La conchoïde admet le point O comme point double : c'est un limaçon de Pascal.

$$S_A = \pi R^2, \qquad S_B = S_C = S + s,$$

S étant l'aire intérieure à la grande boucle et s l'aire intérieure à la petite boucle. Si l'on pose $AB = l$, on a

$$S + s = 2\pi R^2 + \pi l^2.$$

b. $AB = 2R$. La conchoïde admet le point O comme point de rebroussement : c'est une cardioïde,

$$S_A = \pi R^2, \qquad S_B = S_C = S,$$

S étant l'aire intérieure à la cardioïde. On a

$$S = 2\pi R^2 + \pi(2R)^2 = 6\pi R^2.$$

c. $AB > 2R$. La conchoïde n'a pas de point double :

$$S_A = \pi R^2, \qquad S_B = S_C = S,$$

S étant l'aire intérieure à la courbe. On a

$$S = 2\pi R^2 + \pi l^2.$$

Remarque. — Si B et C sont symétriques par rapport à A, la courbe ouverte décrite par B se raccorde avec la courbe ouverte décrite par C.

On peut appliquer la formule (5), à savoir :

$$S_\alpha \cdot \overline{BC} + S_\beta \cdot \overline{CA} + S_\gamma \cdot \overline{AB} + k\frac{\pi}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0,$$

dans laquelle on fera

$$S_\alpha = S_A; \qquad \overline{CA} = \overline{AB}; \qquad \overline{BC} = -2\overline{AB}; \qquad S_\beta + S_\gamma = S,$$

où $S = \int x\,dy$ le long de la conchoïde. On retrouve la formule

$$S = 2S_A + k\pi\overline{AB}^2.$$

Application de la formule d'Holditch a un groupe de trois courbes, dont deux sont confondues. — Les points A et B décrivent la même courbe et dans le même sens.

On a donc $S_A = S_B$. La formule d'Holditch devient

$$S_A.(\overline{BC} + \overline{CA}) + S_C.\overline{AB} + k\pi\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0.$$

On en tire

$$S_C = S_A + k\pi\overline{AC}.\overline{BC}.$$

Si $k = 0$, alors $S_C = S_A$; A et B décrivant une lemniscate de Bernoulli, $k = 0$, et comme $S_A = 0$, on en déduit $S_C = 0$.

Si $k = 1$, alors $S_C = S_A + \pi\overline{AC}.\overline{BC}$; A et B décrivant, dans le sens trigonométrique, un cercle de rayon R, on a $k = 1$, et comme $S_A = \pi R^2$, on en déduit

$$S_C = \pi R^2 + \pi\overline{AC}.\overline{BC},$$

ce que l'on peut vérifier aisément, car alors la courbe Γ_C est un cercle concentrique au cercle Γ_A. On a, en effet,

$$\overline{AC}.\overline{BC} = d^2 - R^2; \qquad \text{d'où} \qquad S_C = \pi d^2,$$

ce que donne un calcul direct.

Cas particulier : C est le milieu de AB. — En supposant $k = 1$, on a

$$S_C = S_A - \pi \frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

Cas où les points A *et* B *sont confondus.* — Cela revient à dire que la droite AC reste constamment tangente à la courbe Γ_A.

La formule

$$S_C = S_A + k\pi\overline{AC}\cdot\overline{BC}$$

s'applique encore en y faisant

$$\overline{BC} = \overline{AC}, \qquad \text{d'où} \qquad S_C = S_A + k\pi\overline{AC}^2.$$

Si $k = 1$, $S_C = S_A + \pi l^2$ en posant $AC = l$.

On vérifie aisément cette formule en supposant que Γ_A est un cercle.

Si Γ_A est un limaçon de Pascal décrit par A dans un sens tel que $S_A = 2\pi R^2 + \pi l^2$, on a $k = 2$. On en tire :

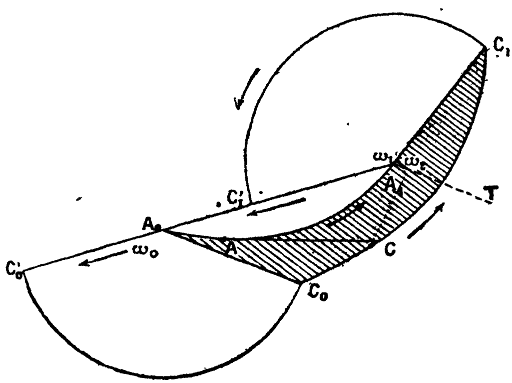
$$S_C = 2\pi\left(R^2 + \overline{AC}^2\right) + \pi l^2.$$

Conséquence de la formule $S_C = S_A + \pi l^2$. — Considérons une courbe Γ_A limitée à deux points A_0 et A_1. Soient A un point quelconque de cette courbe, AT la demi-tangente en ce point orientée dans le sens A_0A_1 et sur cette demi-droite un point C tel que $AC = l$, l étant une longueur constante. Lorsque le point A se déplace de A_0 à A_1, le segment AC balaye une certaine aire. Si l'on convient de compter positivement toute aire balayée par AC tournant dans le sens trigonométrique et négativement toute aire balayée par AC tournant en sens contraire, nous allons démontrer que l'aire balayée par AC lorsque A se déplace de A_0 à A_1 a pour valeur $\frac{1}{2}\theta l^2$, θ désignant $\int_{A_0}^{A_1} d\varphi$, où $\varphi = (\widehat{Ox, AT})$.

Pour établir cette formule, plaçons-nous d'abord dans le cas où la courbe Γ_A forme, avec le segment A_0A_1, une courbe convexe.

Lorsque A se déplace de A_0 à A_1, AC tourne toujours dans le même sens, que nous supposerons, pour fixer les idées, être le sens trigonométrique.

Fig. 5.



Considérons la courbe fermée constituée par Γ_A et A_0A_1. La formule

$$S_C = S_A + \pi l^2$$

pourra s'appliquer à condition d'adjoindre en A_0 et A_1 deux arcs de cercle de centres A_0 et A_1 et de rayons nuls. Le point A décrivant la courbe fermée formée de Γ_A, de A_0A_1 et des deux arcs de cercle précédents, le point C décrira la courbe fermée formée de Γ_C, du segment $C_0'C_1'$ et de deux arcs de cercle C_0C_0', C_1C_1' de rayons égaux à AC.

Désignons par S l'aire limitée par Γ_A, Γ_C, A_0C_0 et A_1C_1, c'est-à-dire l'aire dont nous cherchons l'expression, par σ l'aire limitée par Γ_A et A_0A_1. On a

$$S_C = \sigma + S + \text{aire secteur } A_0C_0C'_0 + \text{aire secteur } A_1C_1C'_1,$$
$$S_A = \sigma.$$

En appliquant la formule $S_C = S_A + \pi l^2$, on trouve

$$S = \pi l^2 - \text{aire secteur } A_0C_0C'_0 - \text{aire secteur } A_1C_1C'_1,$$
$$S = \pi l^2 - \frac{1}{2} l^2\omega_0 - \frac{1}{2} l^2\omega_1 = \frac{1}{2} l^2(2\pi - \omega_0 - \omega_1) = \frac{1}{2} l^2\omega_2,$$

en désignant par ω_2 l'angle TA_1C_1, A_1T étant parallèle à A_0C_0.

Avec les conventions faites plus haut, on a

$$\omega_2 = \theta, \quad \text{où} \quad \theta = \int_{A_0}^{A_1} d\varphi, \qquad \varphi = (\widehat{Ox, AC}),$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}\theta l^2.$$

Pour en déduire que la formule est générale, il suffira de prendre sur Γ_A les points de division $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ tels que les arcs A_0B_1, B_1B_2, ..., $B_{n-1}A_1$ remplissent la condition précédente. On a pour chacun de ces arcs, algébriquement,

$$S_i = \frac{1}{2}\theta_i l^2,$$

d'où, pour l'aire totale,

$$S = \frac{1}{2} l^2(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) = \frac{1}{2}\theta l^2.$$

Application. — Reprenons le cas de la tractrice (*fig*. 2); on déduit aisément de la formule qui précède l'aire de la tractrice et l'aire de la courbe décrite par le point C de la figure 2.