Nouvelles annales de mathématiques

J. Soula

Sur les problèmes de choc avec frottement

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 259-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__259_1>

[R9b]

SUR LES PROBLÈMES DE CHOC AVEC FROTTEMENT;

PAR M. J. SOULA.

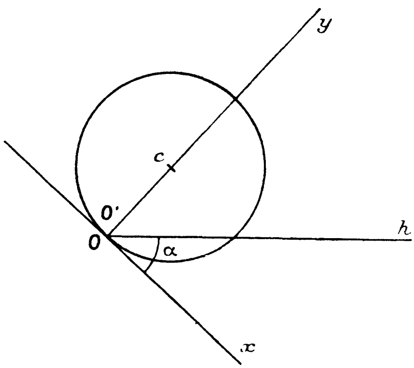
Il est bien connu que les problèmes de dynamique dont les données comportent des liaisons avec frottement peuvent conduire à des impossibilités ou à des indéterminations [1].

On doit s'attendre à des difficultés du même ordre quand on traite des problèmes de choc avec frottement. Je voudrais donner un exemple de problème de ce genre que les lois admises ne permettent pas de traiter. Il a fait l'objet d'une composition d'examen où les données étaient numériques et telles que la solution que je donne au paragraphe II convenait. Je montre qu'il y a au moins une autre solution tout aussi acceptable que la première et que, dans d'autres cas, il n'y a pas de solution. Cette façon de choisir mon exemple montrera bien que les cas où l'application des lois du frottement et des percussions ne donne pas de résultats doivent être considérés comme très généraux.

(1) *Cf.* dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, l'intéressant exemple donné par M. Thiry.

I. Le disque C, très mince, homogène, de masse M, de rayon R, tombe d'un mouvement de translation rectiligne dans un plan vertical. Il rencontre un clou cylindrique, horizontal, normal au plan du disque. Le clou est de rayon négligeable, les corps sont mous, il y a frottement (coefficient f).

La figure montre la position des axes de coordonnées Ox et Oy; O est le clou, O′ est le point du disque qui



est en O au moment du choc. Oz est normal au plan de la figure et dirigé vers l'arrière, Cz' parallèle à Oz passe par le centre C du disque.

La rotation instantanée du disque autour de Cz', par rapport à des axes de direction fixe, sera désignée par ω, les projections sur les axes de la vitesse de C seront désignées par X et Y, la projection sur Ox de la vitesse de O′ sera désignée par V_x. L'angle de Ox avec l'horizontale Oh sera α, la vitesse de translation du disque avant le choc sera V_0, la percussion normale appliquée au disque sera N. On a : $\alpha > 0$, $V_0 > 0$, $N > 0$.

La percussion tangentielle sera $\pm Nf$, portée par Ox. On sait qu'il faut prendre $+Nf$ si la vitesse de O′ est négative pendant la durée du choc et $-Nf$ dans le cas contraire.

II. Au début du choc $V_x = X + R\omega = V_0 \sin\alpha$ est positif. Il est naturel de mettre le problème en équation en supposant *a priori* que V_x garde le signe positif, c'est ce que nous allons faire tout d'abord.

Soient X_0, Y_0, ω_0 les valeurs initiales de X, Y, ω. Les mêmes quantités, après le choc, seront ici désignées par X'_1, Y'_1, ω'_1.

L'équation des moments par rapport à Cz', les équations relatives au centre de gravité sont :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &2Nf = -MR(\omega'_1 - \omega_0), \qquad M(X'_1 - X_0) = -Nf, \\ &\qquad\qquad M(Y'_1 - Y_0) = N. \end{aligned}\right.$$

Exprimons que les corps sont mous : la vitesse de O' après le choc est tangente au disque, d'où

$$(2)\qquad Y'_1 = 0.$$

Résolvons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &X'_1 = X_0 + fY_0, \qquad Y'_1 = 0, \qquad \omega'_1 = \omega_0 + \frac{2fY_0}{R}, \\ &\qquad\qquad N = -MY_0. \end{aligned}\right.$$

La vitesse V_x doit rester positive pour que les équations conviennent. Il est nécessaire, sinon suffisant, qu'elle soit positive ou nulle à la fin du choc. Or, $V_x = X + R\omega$, on a donc la condition

$$X_1 + R\omega_1 = X_0 + R\omega_0 + 3fY_0 \geqq 0.$$

Or

$$X_0 = V_0 \sin\alpha, \qquad Y_0 = -V_0\cos\alpha, \qquad \omega_0 = 0;$$

on a la condition

$$(4)\qquad f \leqq \frac{\tan\!g\,\alpha}{3}.$$

Si cette condition est vérifiée, il est d'usage d'admettre que la solution donnée par les formules (3) est satisfaisante.

III. Nous allons maintenant nous occuper du cas où l'inégalité (4) n'est pas vérifiée. Si le problème peut être traité, c'est que pendant la durée du choc la vitesse V_x change de signe. Nous devrons diviser la durée du choc en plusieurs périodes et nous calculerons les valeurs de X, Y, ω à la fin de chaque période. A la fin de chaque période $X + R\omega = V_x$ est nul et change de signe; toutefois, à la fin de la dernière période, c'est Y qui sera nul (puisque les corps sont mous) et non plus V_x qui devra avoir un signe convenable.

Nous devrons nous demander si le problème ainsi posé peut avoir une solution en prenant un nombre convenable de périodes. Si plusieurs solutions sont possibles, il sera assez naturel de prendre le nombre minimum de périodes. C'est ce que nous venons de faire quand (4) est vérifiée, mais aucune nécessité logique ne nous impose ce choix.

Occupons-nous d'abord de la première période en supposant qu'il y en a plusieurs. Je désignerai par N_1 la fraction de percussion normale relative à cette période, je veux dire que si n est la réaction normale, si la période va du temps t_0 au temps t_1, je pose

$$N_1 = \int_{t_0}^{t_1} n\,dt,$$

X_1, Y_1, ω_1 désigneront les valeurs de X, Y, ω à la fin de la première période. On a alors

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &2N_1 f = -MR(\omega_1 - \omega_0) \qquad && M(X_1 - X_0) = -N_1 f, \\ &M(Y_1 - Y_0) = N_1 && X_1 + R\omega_1 = 0; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(6)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{2X_0 - R\omega_0}{3}, & Y_1 = \dfrac{X_0 + R\omega_0}{3f} + Y_0, \\ \omega_1 = -\dfrac{2X_0 - R\omega_0}{3R}, & N_1 = \dfrac{M(X_0 + R\omega_0)}{3f}. \end{cases}$$

IV. Supposons *a priori* que le choc ne comprenne que deux périodes. Écrivons les équations relatives à la deuxième période avec des notations dont le sens se devine aisément. Les vitesses à la fin de la période seront X'_2, Y'_2, ω'_2. les accents ayant pour but de rappeler que le calcul est fait en supposant que la période est la dernière :

$$(7)\quad \begin{cases} 2N'_2 f = MR(\omega_2 - \omega_1), \qquad M(X'_2 - X_1) = N'_2 f, \\ M(Y'_2 - Y_1) = N'_2, \qquad Y'_2 = 0; \end{cases}$$

d'où

$$(8)\quad \begin{cases} X'_2 = X_1 - fY_1, \qquad Y'_2 = 0, \qquad \omega'_2 = \omega_1 - \dfrac{2fY_1}{R}, \\ N'_2 = -MY_1. \end{cases}$$

La condition à vérifier est ici

$$X'_2 + R\omega'_2 \leqq 0 \qquad \text{ou} \qquad X_1 + R\omega_1 - 3fY_1 \leqq 0,$$

et, en tenant compte du calcul du paragraphe III,

$$(4)\qquad Y_1 \geqq 0 \qquad \text{ou encore} \qquad f \leqq \frac{\tan g\alpha}{3}.$$

Nous retrouvons l'inégalité du paragraphe II et nous pouvons en conclure :

Si (4) est vérifiée, le problème peut être résolu soit avec une, soit avec deux périodes et les solutions sont distinctes.

Si (4) n'est pas vérifiée, le problème ne peut être résolu ni avec une, ni avec deux périodes.

V. Plaçons-nous maintenant dans le cas de trois périodes. Les équations de la première période ont été écrites au paragraphe III.

Les équations de la deuxième se déduisent de celles de la première en échangeant f en $-f$ et en augmentant tous les indices d'une unité. Ces équations résolues sont donc

$$(9)\quad \begin{cases} X_2 = \dfrac{2X_1 - R\omega_1}{3}, & Y_2 = -\dfrac{X_1 + R\omega_1}{3f} + Y_1, \\[2ex] \omega_2 = -\dfrac{2X_1 - R\omega_1}{3R}, & N_2 = -\dfrac{M(X_1 + R\omega_1)}{3f}, \end{cases}$$

ce qui donne, en tenant compte de (5),

$$(10)\qquad X_2 = X_1,\qquad Y_2 = Y_1,\qquad \omega_2 = \omega_1,\qquad N_2 = 0.$$

La dernière équation exprime que, pendant la deuxième période, la réaction du clou sur le disque reste nulle, le disque effectuerait une sorte de bond infiniment petit vers le haut; c'est un résultat qu'il n'y a pas de raison d'écarter.

La troisième période étant la dernière, ses équations seront

$$(11)\quad \begin{cases} -2N'_3 f = MR(\omega'_3 - \omega_2); \qquad M(X'_3 - X_2) = -N'_2 f; \\ M(Y'_3 - Y_2) = N'_2, \qquad Y'_3 = 0. \end{cases}$$

La solution se déduit de (8) en changeant f en $-f$ et en augmentant les indices d'une unité. Il faudra donc ici que

$$X'_3 + R\omega'_3 \geqq 0,\qquad \text{ou}\qquad X_2 + R\omega_2 + 3fY_2 \geqq 0,\qquad \text{ou}\qquad Y_2 \geqq 0$$

et, d'après (10),

$$(4)\qquad Y_1 \geqq 0,\qquad f \leqq \frac{\tan\alpha}{3}.$$

La solution est toujours inacceptable si (4) n'est pas vérifiée.

VI. Supposons que la $n^{\text{ième}}$ période soit la dernière. Il faut que l'inégalité

$$(12) \qquad (-1)^n(X'_n + R\omega'_n) \leqq 0$$

soit vérifiée.

Les équations des $(n-1)$ premières périodes se déduisent aisément de (5) et (6). Pour la $p^{\text{ième}}$ il suffit de changer f en $(-1)^{p-1}f$ et X_1, Y_1, ω_1, X_0, Y_0, ω_0 en X_p, Y_p, ω_p, X_{p-1}, Y_{p-1}, ω_{p-1}. De même que nous avons eu (10), nous obtiendrons

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1}, \quad Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_{n-1}, \quad \omega_1 = \ldots = \omega_{n-1}.$$

Les équations de la $n^{\text{ième}}$ période se déduiront de (1) et (2) par le changement de X'_1, Y'_1, ω'_1 en X'_n, Y'_n, ω'_n et de f en $(-1)^{n-1}f$.

Donc

$$X'_n + R\omega'_n = X_{n-1} + R\omega_{n-1} + 3(-1)^{n-1} f Y_{n-1}.$$

Or

$$X'_{n-1} + R\omega'_{n-1} = 0,$$

et l'inégalité (12) devient

$$Y_{n-1} \geqq 0, \qquad \text{ou} \qquad Y_1 \geqq 0, \qquad \text{ou} \qquad f \leqq \frac{\operatorname{tang}\alpha}{3}.$$

Si donc (4) n'est pas vérifiée, il y a impossibilité.

VII. On pourrait peut-être se demander si les équations qui conviennent pendant une partie du choc ne seraient pas celles du roulement. Il est certain qu'au début il y a glissement puisque la vitesse de O' n'est pas nulle. Si, par la suite, le roulement s'établissait elle serait nulle; on aurait

$$X + R\omega = 0, \qquad Y = 0,$$

et le début du roulement ne pourrait être que la fin d'une des périodes que nous avons envisagées. Mais alors l'équation $Y = o$ étant vérifiée, nous serions amenés à dire que le choc est terminé. D'ailleurs, ces équations ne peuvent être simultanément vérifiées que si

$$f = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{3},$$

et il n'y a pas lieu d'insister sur ce cas.

Nous pouvons conclure de cette discussion que les solutions que l'on donne parfois aux problèmes de choc avec frottement n'ont pas grande valeur théorique. Dans des cas très précis, on pourra cependant garder des formules que l'expérience justifierait.