J.-A. MOREN

Sur certaines relations qui existent entre l'épicycloïde et l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 479-484

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__479_1>

[M¹8a]

SUR CERTAINES RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE L'ÉPICYCLOÏDE ET L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. LE CAPITAINE J.-A. MOREN,
A Halifax (Canada).

Une épicycloïde E_3 et une hypocycloïde H_3, toutes deux à trois rebroussements, seront dites *correspon-*

dantes, si elles ont mêmes points de rebroussement.

Une tangente à H_3 sera dite *tangente originale*, relativement à cette courbe, et *corde de contact*, relativement à E_3. On désignera par T son point de contact, par P et P_1 ses deux autres points de rencontre avec H_3, par R et R_1 ses deux points de rencontre (réels) avec E_3. Les points P et P_1 sont les milieux respectifs de TR et de TR_1.

Les relations des deux courbes avec la tangente considérée donnent lieu à diverses propriétés dont les énoncés présentent entre eux une certaine analogie. Nous signalerons les suivantes, en supprimant les démonstrations, pour plus de brièveté :

Hypocycloïde [1].	Epicycloïde.
I. *a*. La longueur du segment PP_1 est constante et égale à celle d'un axe de symétrie de la courbe.	I. *a*. La longueur du segment RR_1 est constante et égale à celle d'un axe de symétrie de la courbe.
b. Le milieu de ce segment a pour lieu le cercle inscrit à H_3.	*b*. Le milieu de ce segment a le même lieu que ci-contre.
II. *a*. Les cordes focales des paraboles osculatrices en P et P_1 coïncident avec la tangente originale. Les foyers	II. *a*. Les cordes focales des paraboles osculatrices de R et R_1 coïncident avec la corde de contact. Les foyers Q_1, Q_2 de

(1) Plusieurs des propriétés énoncées de l'H_3 se trouvent dans les *Nouvelles Annales* : 1870, p. 202, 256 (Painvin), p. 254 (Laguerre), p. 472 (Callandreau); 1875, p. 21 (Cahen); 1913, p. 49 et 113 (J. Lemaire). Quelques-unes de celles qui figurent dans ce dernier article avaient été obtenues indépendamment par l'Auteur, avant qu'il eût connaissance du travail de M. Lemaire.

respectifs de ces paraboles sont R et R_1 [1].

b. Les axes de ces deux paraboles sont parallèles. La somme des racines carrées de leurs paramètres est constante.

III *a*. Les tangentes aux points P et P_1 sont rectangulaires.

b. La somme des carrés des distances du centre de H_3 à ces deux tangentes est constante.

c. Ces tangentes se rencontrent sur le cercle inscrit à H_3.

d. Les bissectrices de l'angle formé par ces deux tangentes forment un couple de tangentes rectangulaires à une hypocycloïde égale et inversement homothétique à H_3.

ces paraboles sont les points de cette corde de contact déterminés par les relations

$$\frac{RQ}{PQ} = \frac{R_1Q_1}{P_1Q_1} = \frac{2}{3}.$$

Ces foyers ont pour lieu une courbe qui, comme E_3, est d'ordre 8 et de classe 5.

b. Même énoncé que ci-contre.

III. *a*. Les tangentes aux points R et R_1 sont rectangulaires.

b. Même énoncé que ci-contre.

c. Ces tangentes se rencontrent sur le cercle circonscrit à E_3.

d. Du point de rencontre de ces tangentes, on peut encore en mener trois autres à E_3. Deux d'entre elles sont rectangulaires et sont les bissectrices de l'angle formé par la première paire de tangentes.

---

(1) Cette propriété est due à Laguerre (*loc. cit.*), à qui il semble avoir échappé que le lieu du point R est l'E_3 correspondant à H_3.

e. La troisième tangente que l'on peut mener à H_3, par le point de rencontre des deux tangentes considérées, est perpendiculaire à la tangente originale.

e. La corde de contact de la seconde paire de tangentes rectangulaires est perpendiculaire à la corde de contact originale et se confond avec la troisième tangente à H_3.

f. Cette troisième tangente est parallèle à la troisième normale que l'on peut mener à H_3 par le point de rencontre des normales aux points de contact des tangentes rectangulaires.

f. La cinquième tangente est parallèle à la cinquième normale, que l'on peut mener à E_3 par le point d'intersection commun des normales aux points de contact des deux paires de tangentes rectangulaires.

g. Si les trois tangentes font les angles respectifs θ_1, θ_2, θ_3 avec un axe de symétrie de H_3, on a la relation

$$\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_3 = \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_3.$$

g. Si les cinq tangentes font les angles respectifs $\theta_1, \ldots, \theta_5$ avec un axe de symétrie de E_3, on a la relation

$$\frac{1}{5}(\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_3 + \operatorname{tg}\theta_4 + \operatorname{tg}\theta_5) = \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_3 \operatorname{tg}\theta_4 \operatorname{tg}\theta_5.$$

IV. *a.* Les normales en P et P_1 sont rectangulaires, et le lieu de leur point de rencontre est le cercle des rebroussements de H_3.

IV. *a.* Les normales en R et R_1 sont rectangulaires, et le lieu de leur point de rencontre est le cercle des rebroussements de E_3.

Ce cercle est le même dans les deux cas. Les normales aux points P, R se coupent sur lui et de même les normales aux points P_1, R_1. La droite qui joint les deux points d'intersection est le diamètre du cercle parallèle à la tangente originale. Les tangentes au cercle en ces deux mêmes points sont les bissectrices des angles formés respectivement par les tangentes en P, R et par les tangentes en P_1, R_1.

b. La parabole qui a pour foyer le point d'intersection des normales en P et P_1, et qui touche les tangentes en ces points, enveloppe H_3.	*b*. La parabole qui a pour foyer le point d'intersection des normales en R et R_1, et qui touche les tangentes en ces points, enveloppe H_3.
c. Cette parabole a pour tangente au sommet la tangente originale et pour axe la troisième normale issue du point d'intersection des normales en P et P_1.	*c*. Cette parabole a pour tangente au sommet la corde de contact, et pour axe la troisième normale désignée ci-contre.
	d. Ce point d'intersection est aussi le foyer d'une parabole qui touche la seconde paire de tangentes rectangulaires. Cette nouvelle parabole enveloppe H_3, son sommet décrivant cette courbe, et sa tangente au sommet étant la troisième tangente à H_3.
V. *a*. La droite joignant les points d'intersection respectifs des tangentes et des normales en P et P_1 passe par le centre de H_3 et est parallèle aux axes des paraboles osculatrices aux points considérés	V. *a*. Même énoncé que ci-contre, en remplaçant P et P par R et R_1.
b. Le cercle de diamètre PP_1 enveloppe le cercle tritangent et le cercle des rebroussements, sa corde de contact étant la droite désignée ci-dessus.	*b*. Idem.
c. Cette corde de contact et PP_1 se coupent respectivement en leurs milieux.	*c*. Idem.

VI. *a*. La somme des carrés des rayons de courbure en P et P_1 est constante.	VI. *a*. Idem.
b. Le produit des distances à un diamètre quelconque du cercle du point P et du centre de courbure en ce point est égal au produit analogue relatif au point P_1.	*b*. Idem.
c. La somme des carrés des distances au centre des centres de courbure en P et P_1 est constante et égale à 10 fois le carré du rayon du cercle des rebroussements.	*c*. La somme des carrés des distances au centre des centres de courbure en R et R_1 est constante et égale à $\frac{34}{25}$ fois le carré du rayon du cercle des rebroussements.
d. L'enveloppe de l'axe radical des cercles de courbure en ces points est une hypocycloïde à trois rebroussements.	*d*. Même énoncé que ci-contre.
VII. *a*. Le segment d'une tangente à H_3, comprise entre le point de contact et le cercle inscrit, est égal à la corde interceptée sur cette tangente par le cercle.	VII. *a*. Le point de contact d'une tangente à E_3 divise, dans le rapport $\frac{1}{4}$, la corde interceptée sur cette tangente par le cercle circonscrit.
b. La somme des puissances des points de contact de deux tangentes rectangulaires, par rapport au cercle tritangent, est constante.	*b*. Même énoncé que ci-contre.
c. La somme des puissances des pieds de deux normales rectangulaires, par rapport au cercle des rebroussements, est constante.	*c*. Idem.