NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Sur le maximum et le minimum des fonctions de deux variables

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 41-50

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__41_0>

[C1f]

SUR LE MAXIMUM ET LE MINIMUM DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES;

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ développable par la formule de Taylor autour d'un point que nous pouvons supposer être l'origine ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$). Scheeffer a indiqué une méthode permettant de reconnaître si la fonction z est extremum (c'est-à-dire maximum ou minimum) en ce point [1]. V. von Dantscher a repris la question d'une façon différente et a donné un procédé permettant de reconnaître au bout d'un nombre fini d'opérations si la fonction est extremum, le seul cas où la méthode est en défaut étant celui où la surface $z = f(x, y)$ est tangente au plan des xy suivant une ou plusieurs lignes passant par l'origine [2]. La méthode de von Dantscher est celle qui se présente naturellement à l'esprit, mais le procédé direct employé par l'auteur, pour montrer que le nombre des opérations à effectuer est fini, est assez long.

Je vais montrer qu'on peut conduire la démonstration d'une façon simple et rapide en utilisant dès le début le théorème de Weierstrass sur les fonctions

[1] *Mathematische Annalen*, t. 35, 1890, p. 541.
[2] *Mathematische Annalen*, t. 42, 1893, p. 89.

implicites dont V. von Dantscher ne fait usage qu'à la fin de son exposé [1].

1. Nous supposons que $f(x, y)$ possède des dérivées partielles d'ordre $p+1$ continues et que les conditions de l'extremum relatives aux dérivées du premier ordre sont réalisées, de sorte que le développement de z par la formule de Taylor s'écrit

$$(1) \quad z = f(x,y) \equiv \varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + \ldots + \varphi_p(x,y) + \mathrm{R}_p(x,y),$$

$\varphi_i(x, y)$ étant un polynome homogène de degré i à coefficients numériques, et $\mathrm{R}_p(x, y)$ un polynome homogène de degré $p+1$ en x et y dont les coefficients sont des fonctions de x et y bornées au voisinage de l'origine.

Nous supposons que la première des formes $\varphi_i(x, y)$ qui n'est pas identiquement nulle est de degré pair et semi-définie, le résultat étant immédiat dans les autres cas.

Plaçons-nous d'abord dans le cas simple où $\varphi_2(x, y)$ n'est pas identiquement nul et est semi-défini, on a

$$(1) \quad z = \mathrm{A}(y - \alpha_1 x)^2 + \varphi_3(x,y) + \ldots + \varphi_p(x,y) + \mathrm{R}_p(x,y) \text{ [2]};$$

on peut en particulier prendre $p = 2$, de sorte que M étant le maximum de la valeur absolue des quatre dérivées partielles du troisième ordre pour $x^2+y^2 \leqq r^2$, on a

$$(2) \quad |z - \mathrm{A}(y - \alpha_1 x)^2| \leqq \frac{2}{3} \mathrm{M}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \quad (x^2+y^2 \leqq r^2).$$

---

[1] La présente Note n'a aucune prétention à l'originalité. Je me propose simplement de simplifier la démonstration d'une propriété connue.

[2] Le cas où les termes du second degré sont de la forme $\mathrm{A}x^2$ se traite de la même façon.

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit, isolons la droite $y - \alpha_1 x = 0$ par un angle Δ_ε d'ouverture 2ε ayant cette droite pour bissectrice. A l'extérieur de cet angle ou sur ses côtés, on a

$$(y - \alpha_1 x)^2 > (1 + \alpha_1^2) \sin^2 \varepsilon (x^2 + y^2);$$

donc, d'après l'inégalité (2), z a le signe de A dans tout domaine fermé D_ε extérieur à un angle Δ_ε et intérieur au cercle de rayon R_ε, R_ε étant le plus petit des deux nombres r et $\frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon \, M^{-1} (1 + \alpha_1^2)$.

Posons $y - \alpha_1 x = tx$, on aura

$$z = x^2 f_1(x, t),$$

$$\begin{aligned} f_1(x, t) \equiv A t^2 &+ x \varphi_3(1, \alpha_1 + t) + \ldots \\ &+ x^{p-2} \varphi_p(1, \alpha_1 + t) + x^{p-1} R_p(1, \alpha_1 + t), \end{aligned}$$

les coefficients de $R_p(1, \alpha_1 + t)$ étant des fonctions bornées de x et t.

Si $f_1(x, t)$ est extremum pour $x = t = 0$, il existe un domaine $-x_0, +x_0; -t_0, +t_0$; dans lequel $f_1(x, t)$ a le signe de A (puisque cette fonction a le signe de A pour x nul), si l'on prend l'angle Δ_ε intérieur à l'angle balayé par la droite $y = tx$ lorsque t varie de $\alpha_1 - t_0$ à $\alpha_1 + t_0$, x est différent de 0 dans cet angle, donc z a le signe de A dans Δ_ε, et, d'après ce qui précède, z est extremum.

Si $f_1(x, t)$ n'est pas extremum pour $x = t = 0$, c'est qu'il n'a pas toujours le signe de A, il existe des points $x_n \neq 0$, t_n tendant vers $x = 0$, $t = 0$, tels que $A f_1(x_n, t_n) \leqq 0$, donc aussi tels que $Az \leqq 0$, z n'est pas extremum.

On est ainsi ramené à chercher si $f_1(x, t)$ est extremum pour $x = 0$, $y = 0$. Le raisonnement a été fait dans le cas de l'extremum strict, mais on voit de même que, pour que z soit extremum au sens large, c'est-à-dire que $Az \geqq 0$, il faut et il suffit que $f_1(x, t)$ soit extremum au sens large.

Le seul cas ambigu qui puisse se produire dans l'étude de $f_1(x, t)$ est celui où $\varphi_3(1, \alpha_1) = 0$, et où la forme

$$At^2 + t\varphi'_{3y}(1, \alpha_1) + x^2\varphi_4(1, \alpha_1)$$

est encore semi-définie, elle s'écrit alors $A(t - \alpha_2 x)^2$ et l'on est ramené à la même question. On effectuera la transformation $t = \alpha_2 x + ux$, et ainsi de suite.

Si la question n'est pas résolue au bout de q opérations, les valeurs des dérivées partielles d'ordre $q+1$ interviendront alors, on peut donc être arrêté si les dérivées d'un certain ordre ne sont plus continues. Supposons que z soit développable en série de Taylor dans le voisinage de l'origine, peut-il arriver que dans l'application de la méthode on obtienne toujours une forme semi-indéfinie ?

D'après un théorème de Weierstrass ([1]) l'équation

$$f(x, y) = 0$$

définit deux fonctions y_1 et y_2 de x et deux seulement s'annulant pour $x = 0$ et l'on peut écrire

$$f(x, y) = [Ay^2 + a_1(x)y + a_2(x)]\,H(x, y),$$

$a_1(x)$, $a_2(x)$, et $H(x, y)$ étant holomorphes dans un domaine $|x|, |y| < r$ et $H(x, y) > 0$ dans ce domaine, $|\text{car } H(0, 0) = 1|$. On a donc, pour $|x| < r$,

$$(y_1 - y_2)^2 = \frac{1}{A^2}\{[a_1(x)]^2 - 4A\,a_2(x)\},$$

et, par suite, si $y_1 - y_2$ n'est pas identiquement nul,

([1]) *Voir* GOURSAT, *Traité d'Analyse*, t. 2, 3e édition, p. 279.

c'est-à-dire $Ay^2 + a_1(x)y + a_2(x)$ n'est pas un carré, il existera un nombre s tel que $\frac{y_1 - y_2}{x^s}$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers o.

Lorsqu'on pose $y = (\alpha_1 + t)x$, les solutions y_1 et y_2 (dont le rapport à x tend vers α_1) sont transformées en les racines de $f_1(x, t)$ qui tendent vers o lorsque x tend vers o, et ainsi de suite. Si au bout de q opérations la question n'est pas résolue, c'est que la transformation

$$(3) \qquad y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_q x^q + x^q Y$$

donne

$$z = x^{2q} f_q(x, Y)$$

avec

$$(4) \qquad f_q(x, Y) \equiv A(Y - \alpha_{q+1} x)^2 + \ldots$$

et y_1 et y_2 s'obtiennent en remplaçant Y dans l'égalité (3) par les solutions Y_1 et Y_2 de (4) qui s'annulent pour $x = 0$, par suite

$$\lim_{x=0} \frac{y_1 - y_2}{x^q} = 0.$$

Il est donc impossible que q soit supérieur à s, *au bout d'un nombre fini d'opérations la recherche est terminée.*

Supposons maintenant que $y_1 \equiv y_2$, on a

$$f(x, y) \equiv A\left[y + \frac{a_1(x)}{A}\right]^2 H(x, y)$$

si l'on fait les transformations successives

$$y = (\alpha_1 + t)x, \qquad t = (\alpha_2 + u)x, \qquad \ldots,$$

les termes de plus bas degré sont donnés par le premier terme puisque $H(0, 0) = 1$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les coefficients du développement de $\frac{a_1(x)}{A}$; comme les α_i sont réels, la fonction $a_1(x)$ est réelle. Le résultat final est donc le suivant :

Si $f(x, y)$ est holomorphe, la méthode conduit à un résultat au bout d'un nombre fini d'opérations, sauf si $f(x, y)$ contient un facteur double réel $[y-\alpha(x)]^2$, cas dans lequel il y a extremum au sens large.

2. Considérons maintenant le cas général où la première forme $\varphi_i(x, y)$ non identiquement nulle est de rang $2n$ et est semi-définie :

$$\varphi_{2n} \equiv A(y-\alpha_1 x)^{2a}(y-\beta_1 x)^{2b}\ldots(y-\delta_1 x)^{2d} x^{2e} \psi(x, y),$$

$\psi(x, y)$ étant définie positive. On est ramené ici à étudier la fonction

$$f_1(x, t) = x^{-2n} f(x, \alpha_1 + t)$$

et les fonctions analogues. Si toutes ces fonctions ont un extremum au sens strict, il en est de même de z ; si toutes sont extremum au sens strict ou large, z est extremum au sens large, enfin si l'une de ces fonctions n'est pas extremum, z n'est pas extremum.

On a

$$f_1(x, t) \equiv A t^{2a} \chi(t) + x \varphi_{2n+1}(1, \alpha_1 + t) + \ldots,$$

$\chi(t)$ possédant un terme constant positif. Il peut se faire que l'ensemble des termes de plus bas degré de $f_1(x, t)$ soit une forme semi-définie et l'on sera ramené à la même question ; cette forme est de degré $2a$ au plus, et le seul cas où l'on n'aura réalisé aucun progrès est celui où cette forme sera encore une puissance $(2a)$, donc où

$$f_1(x, t) \equiv A(t-\alpha_2 x)^{2a} + \ldots.$$

On posera alors $t = (\alpha_2 + u)x$, le même cas pourra se produire, et ainsi de suite. Je dis qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on aura effectué une réduction, c'est-à-dire qu'on sera ramené au moins à une forme semi-définie dont les facteurs seront à des puissances moindres que $2a$, sauf dans un cas exceptionnel (on suppose $f(x, y)$ holomorphe).

D'après le théorème de Weierstrass, $f_1(x, t)$ a $2a$ solutions nulles pour $x = 0$, et l'on a dans un domaine entourant l'origine

$$f_1(x, t) \equiv Q(x, t)\, H(x, t)$$

avec

$$(5)\qquad Q(x, t) \equiv A[t^{2a} + t^{2a-1} A_1(x) + \ldots + A_{2a}(x)],$$

les fonctions $A_i(x)$ étant holomorphes ainsi que $H(x, t)$ pour $|x| < r$, $|t| < r$ et $H(x, t)$ étant positif dans ce domaine. L'équation $Q(x, t) = 0$ donne les $2a$ solutions $t_1, t_2, \ldots, t_{2a}$, de $f_1(x, t)$ qui s'annulent pour $x = 0$, celles de ces solutions qui sont distinctes sont les racines de l'équation obtenue en annulant le quotient du polynome $Q(x, t)$ par le plus grand commun diviseur entre ce polynome et sa dérivée; les racines distinctes sont donc celles d'une équation

$$(6)\qquad t^\lambda + t^{\lambda-1} B_1(x) + \ldots + B_\lambda(x) = 0$$

dont les coefficients sont holomorphes à l'origine, car ils sont obtenus par des opérations arithmétiques en nombre fini à partir des $A_i(x)$ et ils doivent s'annuler pour $x = 0$. Si $Q(x, t)$ n'est pas une puissance $(2a)^{\text{ième}}$ l'équation (6) est au moins du second degré et l'équation aux carrés des différences des racines possède un terme constant non identiquement nul $C(x)$; si cette fonction $C(x)$ s'annule s fois pour $x = 0$, l'équation (6) et par suite (5) possède deux racines t_1 et t_2 telles que $\frac{t_1-t_2}{x^s}$ tend vers un nombre fini lorsque x tend vers o.

Or, on voit comme au n° 1 que, si au bout de q opérations la réduction n'est pas effectuée, le quotient de la différence de deux solutions de $Q(x, t) = 0$ par x^{q-1} tend vers o, c'est donc que la réduction s'opère au bout de s opérations au plus.

Si $Q(x, t)$ a toutes ses racines égales, donc est de la forme $A[y - \alpha(x)]^{2a}$, ce sont les coefficients de $\alpha(x)$ que l'on obtient dans les opérations effectuées en vue de la réduction qui est impossible, par suite $\alpha(x)$ est réel, et comme les solutions de $f(x, y)$ correspondant au facteur

$$(y - \alpha_1 x)^{2a}$$

se déduisent de celles de $Q(x, t)$ par la transformation

$$y = (\alpha_1 + t)x,$$

$f(x, y)$ contient le facteur

$$[y - \alpha_1 x - \alpha(x)]^{2a}.$$

Ainsi la réduction s'opère au bout d'un nombre fini d'opérations, sauf si $f(x, y)$ contient un facteur réel à la puissance $2a$. Écartons ce cas. Au bout de q opérations on aura la transformation

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_q x^q + Y x^q$$

donnant

$$f(x, y) \equiv x^{2n+2a(q-1)} f_q(x, Y),$$

les termes de plus bas degré de $f_q(x, Y)$ pouvant constituer une forme semi-définie dont les facteurs premiers seront élevés à une puissance moindre que $2a$, la réduction des fonctions correspondantes se fera après un nombre fini d'opérations, sauf si $f_q(x, Y)$ contient un facteur réel de l'une des deux formes

$$[Y - \alpha(x)]^{2a'}, \quad [x - \beta(Y)]^{2a'}.$$

Dans un cas comme dans l'autre, $f(x, y)$ admettra une solution réelle d'ordre $(2a')$.

D'une façon générale, après avoir effectué p réductions successives, on aura une transformation de la forme

$$x = S(X, Y), \qquad y = T(X, Y),$$

S et T étant des polynomes en X et Y à coefficients réels s'annulant pour $X = 0$, $Y = 0$, donnant

$$f(x, y) \equiv R(X, Y) f_k(X, Y).$$

$R(X, Y)$ étant un monome. Si dans $f_k(X, Y)$ la réduction d'un facteur de degré 2μ ne s'opère pas, c'est que cette fonction contient un facteur de l'une des formes

$$[Y - \gamma(X)]^{2\mu}, \quad [X - \delta(Y)]^{2\mu},$$

$\gamma(X)$ et $\delta(Y)$ étant holomorphes, réelles et nulles à l'origine. Il en résulte que $f(x, y)$ a une solution réelle, uniforme, d'ordre 2μ s'annulant pour $x = 0$.

Le seul cas où la méthode ne conduit pas à un resultat au bout d'un nombre fini d'opérations est donc celui où $f(x, y)$ est de la forme

$$(7) \qquad f(x, y) \equiv [\Pi \chi_i(x, y)]^2 F(x, y),$$

chaque facteur $\chi_i(x, y)$ définissant une branche de courbe simple réelle passant par l'origine.

Il faut en outre remarquer que, lorsqu'une réduction ne s'opère pas, il y a extremum large dans la région du plan correspondante, si donc on conduit les diverses opérations de réductions *simultanément* à partir des divers facteurs de $\varphi_{2n}(x, y)$, le seul cas exceptionnel est celui où $f(x, y)$ étant de la forme (7) a un extremum au sens large. La surface $z = f(x, y)$ est tangente au plan des xy suivant certaines lignes réelles passant par l'origine, et reste du même côté du plan des xy dans le voisinage de l'origine.

On verra sans peine en utilisant la décomposition en deux facteurs de Weierstrass utilisée ci-dessus que, lorsqu'il y a extremum au sens large, $f(x, y)$ est de la forme (7), et le résultat définitif sera :

Lorsque $f(x)$ est analytique, les opérations de recherche conduites simultanément donnent un résultat au bout d'un temps fini, sauf s'il y a extremum large.

Lorsque $f(x, y)$ est un polynome, on peut reconnaître, par des opérations algébriques dont le nombre est limité par le degré m, si l'on se trouve dans le cas d'exception; mais cette recherche est même inutile, on verra facilement que si au bout de $(2m)!$ opérations effectuées à partir d'un facteur de $\varphi_{2n}(x, y)$, on n'est pas parvenu à un résultat, $f(x, y)$ est de la forme (7). *Le problème est donc complètement résoluble dans le cas des polynomes.*

Lorsque $f(x, y)$ a un développement illimité, chaque transformation qui redonne une forme semi-définie fournit deux relations entre les coefficients du développement portant sur un coefficient au moins dont le rang croît à chaque opération; lorsque le cas d'exception se produit, il y a une infinité de relations portant sur une infinité de coefficients du développement taylorien. Il faudrait connaître ces relations pour pouvoir dire que le problème est complètement résolu.