

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1920

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 316-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__316_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
EN 1920.**

Mathématiques (PREMIÈRE COMPOSITION).

I. 1° *Calculer la valeur $m = \varphi(x_0)$ qu'il faut attribuer à la constante m pour que la dérivée de la fonction*

$$f(x) = \left(2 - \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 5}}\right) e^{\frac{x}{2}}$$

s'annule pour $x = x_0$. Construire la courbe qui représente la fonction $\varphi(x)$.

2° Quelle est, suivant les diverses valeurs de m , la forme de la courbe qui représente la fonction $f(x)$?

II. On considère la suite des nombres $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ définie par la formule de récurrence

$$2S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n^2 + a_n},$$

où a_n est le terme général d'une série donnée, à termes positifs,

$$(A) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

1° Démontrer l'inégalité

$$S_{n+1} < S_n + \frac{a_n}{4};$$

en conclure que S_n tend vers une limite, pour n infini, si la série (A) est convergente.

2° La série (A) est-elle, réciproquement, convergente si S_n tend vers une limite pour n infini?

Mathématiques (DEUXIÈME COMPOSITION).

On considère la transformation géométrique suivante : Étant donnée une origine O , on dira qu'un point M' est homologue d'un point M , si M et M' sont sur une même droite passant par l'origine et si leurs rayons vecteurs $\rho = \overline{OM}$, $\rho' = \overline{OM'}$ satisfont à la relation $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}$, où a est une longueur donnée. On observera qu'un point M a deux homologues M' , la définition précédente laissant arbitraire le sens positif sur la droite OM . Le lieu des homologues des points d'une ligne L ou d'une sur-

face S s'appellera la ligne homologue de L ou la surface homologue de S.

1° *Quelle est la ligne homologue d'un cercle passant à l'origine? La construire dans le cas où le rayon de ce cercle est $\frac{a}{4}$.*

2° *Soient C' la courbe ainsi tracée et C le cercle donné de rayon $\frac{a}{4}$. Chaque point M' de C' est homologue d'un seul point M de C. Calculer l'aire balayée par le segment de droite MM', lorsque M' décrit entièrement la courbe C'.*

3° *Démontrer que la tangente MT en M à une courbe plane L est rencontrée par la tangente en M', homologue de M, à la courbe homologue L', en un point qui ne dépend pas de la longueur a. Comment peut-on déterminer ce point sur la droite MT?*

Comment se généralise cette propriété lorsque la courbe L est une courbe gauche?

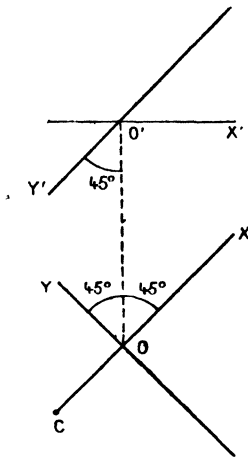
4° *En s'appuyant sur le résultat précédent, on montrera, sans calcul, qu'une propriété analogue a lieu pour les plans tangents à une surface S et à la surface homologue S'; et qu'il en résulte que la normale en M' à S' reste tangente à une courbe plane E, lorsqu'on donne à a différentes valeurs, en laissant fixes la surface S et le point M qui a M' pour homologue. Quelle est la courbe E?*

5° *Quelle est la surface engendrée par E lorsque, M restant fixe sur une courbe donnée L, la surface S varie en passant constamment par cette courbe?*

Épure.

Un cylindre de révolution, de 5^{cm} de rayon, a pour axe la droite horizontale dont les projections sont

X et X'. Un hyperboloïde de révolution réglé a pour axe la droite (Y, Y') rencontrant la droite (X, X') au point (O, O') . Une de ses génératrices est la verticale projetée horizontalement au point C de X, à 5^{cm} à gauche de la droite OO' .



On demande de représenter par ses projections le solide commun au cylindre et à l'hyperboloïde.

Pour la mise en place, on se conformera aux indications du croquis : OO' est dirigé suivant le grand axe de la feuille; le point O à 6^{cm} au-dessous du centre; le point O' à 11^{cm} au-dessus.