Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__307_1>

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les coordonnées rectangulaires* (x_1, x_2, x_3) *d'un point* M *d'une courbe* C *sont données par les formules*

$$x_1 = \sin\omega\,[f''\cos t + f'\sin t],$$
$$x_2 = \sin\omega\,[f''\sin t - f'\sin t],$$
$$x_3 = \cos\omega\,[f + f''],$$

où ω *est une constante et* f *une fonction de* t.

1° *Déterminer la fonction* f *de telle sorte que les tangentes à la courbe appartiennent à un complexe linéaire donné* Γ.

2° *Montrer que, dans ce cas, les normales principales à la courbe* C *rencontrent une droite fixe.*

3° *Trouver les lignes asymptotiques de la surface réglée formée par les normales principales à la courbe* C.

4° *Comment doit-on choisir le complexe* Γ *pour que la courbe* C *soit cylindrique?*

Solution. — 1° Les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\tau_1 = \sin\omega\cos t,\qquad \tau_2 = \sin\omega\sin t,\qquad \tau_3 = \cos\omega;$$

τ_3 est constant, en sorte que la courbe est une hélice portée par un cylindre de direction Ox_3.

Les moments de la tangente par rapport aux axes sont :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\sin\omega\cos\omega\,(f\sin t + f'\cos t),\\ \lambda_2 &= \sin\omega\cos\omega\,(f\cos t - f'\sin t),\\ \lambda_3 &= \sin^2\omega\, f'.\end{aligned}$$

Exprimons que la tangente appartient au complexe linéaire

$$A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + A_3\tau_3 + L_1\lambda_1 + L_2\lambda_2 + L_3\lambda_3 = 0,$$

et nous aurons pour déterminer f l'équation linéaire

$$\begin{aligned}(1)\quad f'[L_3\sin\omega - (L_1\cos t + L_2\sin t)\cos\omega]&\\ + f\cos\omega\,(L_2\cos t - L_1\sin t)&\\ + A_1\cos t + A_2\sin t + A_3\cot\omega &= 0,\end{aligned}$$

dont l'intégration se ramène à des quadratures élémentaires.

2° Les cosinus directeurs de la binormale, puis ceux de la normale principale sont :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \cos\omega\cos t, & \beta_2 &= \cos\omega\sin t, & \beta_3 &= -\sin\omega,\\ \nu_1 &= -\sin t, & \nu_2 &= \cos t, & \nu_3 &= 0.\end{aligned}$$

La normale principale à (C) a pour équations

$$X_1\cos t + X_2\sin t = f''\sin\omega,\qquad X_3 = \cos\omega\,(f + f'').$$

Exprimons que toutes les normales rencontrent la droite

$$X_1 = aX_3 + p,\qquad X_2 = bX_3 + q,$$

et nous aurons la condition

$$f''[\sin\omega - \cos\omega\,(a\cos t + b\sin t)] - f\cos\omega\,(a\cos t + b\sin t) \\ - p\cos t - q\sin t = 0,$$

qui doit coïncider avec l'équation déduite de (1) par dérivation; l'identification donne linéairement a, b, p, q, en sorte que la droite fixe (D) prend pour équations

$$A_1 + L_1 X_3 - L_3 X_1 = 0, \qquad A_2 + L_1 X_2 - L_2 X_3 = 0.$$

3° Les coordonnées d'un point de la surface réglée formée par les normales principales auront pour expressions paramétriques

$$\xi_1 = x_1 - u\sin t, \qquad \xi_2 = x_2 + u\cos t, \qquad \xi_3 = x_3.$$

Les asymptotiques comprennent d'une part les génératrices rectilignes $t =$ const., et d'autre part des courbes qui comprennent la courbe donnée (C) : ces courbes, qui dépendent en général d'une équation de Riccati, s'obtiendront par l'intégration d'une équation linéaire, soit par quadratures.

Les coefficients du plan tangent sont

$$A_1 = \beta_1, \qquad A_2 = \beta_2, \qquad A_3 = \beta_3 + \frac{u}{f' + f'''}.$$

L'équation des lignes asymptotiques s'écrit donc

$$(\sin t\, d\xi_1 - \cos t\, d\xi_2)\cos\omega\, dt - d\xi_3\, d\left(\frac{u}{f' + f'''}\right) = 0,$$

ou, après suppression de la solution $dt = 0$,

$$2\frac{du}{u} - \frac{f'' + f^{\text{IV}}}{f' + f'''}\,dt = 0;$$

il vient immédiatement

$$u^2 = C(f' + f''').$$

4° La courbe (C) est une hélice qui sera circulaire si

$$f'^2 + f''^2 = \text{const.},$$

c'est-à-dire si

$$f'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad f' + f''' = 0;$$

ce derniers cas, exclu des calculs précédents, correspond à une courbe C réduite à un point.

Si $f'' = 0$, on a

$$f' = a, \qquad x_1 = a \sin\omega \sin t, \qquad x_2 = -a \sin\omega \cos t,$$
$$x_3 = at \cos\omega + \text{const.};$$
$$\tau_1 = \sin\omega \cos t, \qquad \tau_2 = \sin\omega \sin t, \qquad \tau_3 = \cos\omega,$$
$$\lambda_1 = -a \sin\omega \cos\omega [\cos t + (t-k)\sin t],$$
$$\lambda_2 = -a \sin\omega \cos\omega [\sin t - (t-k)\cos t],$$
$$\lambda_3 = a \sin^2\omega.$$

Nous avons à exprimer que l'on a identiquement

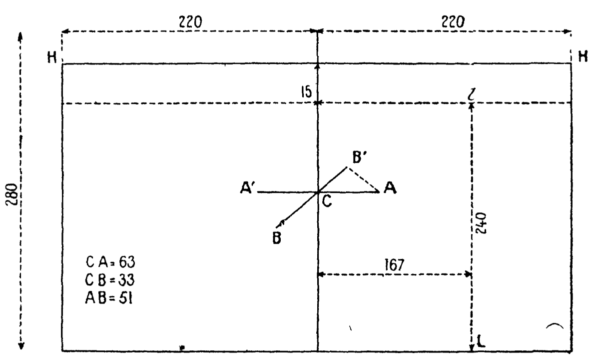
$$A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + A_3\tau_3 + L_1\lambda_1 + L_2\lambda_2 + L_3\lambda_3 = 0,$$

ce qui donne

$$L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0;$$

d'où le complexe spécial d'axe Ox_3.

Épreuve pratique. — Perspective d'un cône avec ombres. — *Données conformes au croquis évaluées en millimètres.*



On donne sur le Tableau une ellipse de centre C *dont* AA' *et* BB' *sont deux diamètres conjugués.* AA' *est parallèle à la ligne d'horizon* HH'. *Cette ellipse est la perspective d'un cercle horizontal. Ce cercle est la base d'un cône* *droit ayant son sommet au-dessous de sa base, et dont la hauteur, évaluée à l'échelle du plan de front de l'axe, vaut* 120.

Les rayons lumineux sont parallèle; L *est leur point de fuite.*

1° *Déterminer les points principaux* P *et* D.

2° *Représenter le cône creux et opaque par son contour apparent perspectif.*

3°. *Construire l'ombre propre du cône et l'ombre portée à son intérieur.*

On déterminera un point quelconque de la courbe d'ombre portée, la tangente en ce point, ainsi que les points et tangentes remarquables.

NOTA. — *Dessiner les lignes d'ombre en noir fin, les lignes de construction en rouge fin continu. Mettre sur les ombres visibles des hachures fines, bleues ou grises, espacées d'environ* 1^{mm},5. (Juin 1919.)