NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 222-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__222_0>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPERIEURE.

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Étude générale de la fonction*

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)\sqrt{z}};$$

points singuliers ?

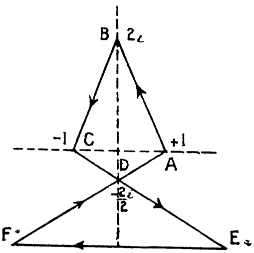
2° *Calculer l'intégrale définie :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \sin x}{+\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$$

(*à cet effet, on étudiera l'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *prise le long d'un contour convenablement choisi*).

3° *On pose*

$$a = \int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{+\sqrt{x}(x^2+1)}, \qquad b = \int_0^1 \frac{\sin x\,dx}{+\sqrt{x}(x^2+1)}.$$



On demande l'expression, à l'aide de a et de b, de ***l'intégrale***

$$\int_i^1 \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2+1)\sqrt{z}},$$

c désignant un contour tel que ABCDEFDA, *et* $\sqrt{z}$ *ayant la valeur* $+1$ *au point de départ* A.

Nota. — Dans l'énoncé, x désigne une variable d'intégration essentiellement réelle.

Solution. — 1° La fonction $f(z)$ admet deux pôles simples $z = \pm i$ et un point critique de branchement $z = 0$; une rotation de l'affixe de z autour de ce dernier point change le signe de la fonction.

Les résidus relatifs aux pôles $\pm i$ sont

$$R_1 = -\frac{e^{-1}}{2\sqrt{2}}(1+i), \qquad R_2 = -\frac{e}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

2° Soit I l'intégrale demandée. Calculons $\int f(z)\,dz$ le long d'un contour Γ formé d'un cercle C de rayon très grand et de centre $z = 0$, qu'on quitte près de l'axe Ox pour décrire un lacet autour de l'origine. Nous avons

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i(R_1 + R_2).$$

Or l'intégrale prise le long de C et du cercle c du lacet tendent vers zéro, lorsque les rayons tendent respectivement vers l'infini et zéro. Il reste

$$-2\int_0^\infty \frac{\cos x + i\sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = 2\pi i(R_1 + R_2).$$

et l'on en déduit

$$\int_0^\infty \frac{\cos x + i\sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\operatorname{sh} 1 + i \operatorname{ch} 1),$$

et

$$I = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}e}.$$

3° Considérons le lacet l allant du point $z = 1$ à l'origine qu'il entoure. On a

$$\int_{ABCDA} - \int_{\Gamma} = 2\pi i R_1,$$

$$\int_{DEFD} = -2\pi i R_2;$$

l'intégrale demandée est donc

$$\int_{\Gamma} + 2\pi i(R_1 - R_2),$$

ou

$$-2\int_0^1 \frac{\cos x + i \sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx + \frac{2\pi i}{\sqrt{2}}(\operatorname{sh} 1 - i \operatorname{ch} 1),$$

ou enfin

$$(\pi\sqrt{2}\operatorname{ch} 1 - 2a) + i(\pi\sqrt{2}\operatorname{sh} 1 - 2b).$$

Épreuve pratique. — *Trouver deux nombres a et b tels que les deux fonctions*

$$f(u) = e^{au}\frac{\sigma^2(u-\omega-\omega')}{\sigma^2 u},$$

$$g(u) = e^{bu}\frac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')}{\sigma u\,\sigma(u-\omega-\omega')}.$$

admettent les périodes 2ω et $2\omega'$.

a et b étant ainsi déterminés, décomposer $f(u)$ et $g(u)$ en éléments simples; comparer les résultats obtenus.

Solution. — Le changement de u en $u+2\omega$ et en $u+2\omega'$ multiplie respectivement

$$f(u) \quad \text{par} \quad e^{2a\omega-4\eta\omega'-4\eta\omega} \quad \text{et} \quad e^{2a\omega'-4\eta'\omega-4\eta'\omega'},$$

$$g(u) \quad \text{par} \quad e^{2b\omega} \quad \text{et} \quad e^{2b\omega'},$$

ou, en tenant compte de la relation

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{1}{2}\pi i,$$

$$f(u) \quad \text{par} \quad e^{2\omega[a-2(\eta+\eta')]} \quad \text{et} \quad e^{2\omega'[a-2(\eta+\eta')]}.$$

De là les conditions

$$b = 0, \qquad a = 2(\eta+\eta').$$

On a alors

$$f(u) = \sigma^2(\omega + \omega')\left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2 = \sigma^2(\omega + \omega')[pu - e_2];$$

$$g(u) = -\frac{\sigma\omega.\,\sigma\omega'}{\sigma(\omega+\omega')}\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma u},\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sigma\omega.\,\sigma\omega'}{\sigma(\omega+\omega')}\,\frac{p'u}{pu - e_2},$$

$$g(u) = \frac{\sigma\omega.\,\sigma\omega'}{\sigma(\omega+\omega')}\,[\zeta\omega + \zeta\omega' + \zeta u - \zeta(u + \omega + \omega')].$$

La comparaison des résultats montre que

$$g(u) = -\frac{1}{2}\,\frac{\sigma\omega.\,\sigma\omega'}{\sigma(\omega+\omega')}\,\frac{d}{du}\operatorname{Log} f(u).$$

(Juin 1919.)

Paris.

Epreuve théorique. — I. *Démontrer que sur la courbe générale du 3e degré, il y a, en dehors des points d'inflexion,* vingt-sept *points en chacun desquels passe une conique ayant ses* six *points de rencontre avec la courbe confondus en ce point. Établir ensuite que ces vingt-sept points sont les points de contact des tangentes menées à la courbe par les points d'inflexion de celle-ci.*

II. *Démontrer que l'inversion de l'intégrale elliptique*

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{A u^3 + B u^2 + C u + D}} = z$$

conduit à une fonction uniforme doublement périodique $u(z)$ ayant un pôle double dans chaque parallélogramme des périodes.

En désignant par α un tel pôle, quels sont les coefficients de $\frac{1}{(z-\alpha)^2}$ et $\frac{1}{z-\alpha}$ dans le développement de $u(z)$ autour de α?

Montrer ensuite qu'on peut choisir la constante μ de manière que, en posant

$$H(z) = \mu \int_{z_0}^{z} u(z)\,dz,$$

l'expression

$$e^{\int_{z_0}^{z} H(z)\,dz}$$

soit une fonction entière *de z. En déduire que $u(z)$ peut se mettre sous la forme*

$$u(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)},$$

$G(z)$ et $G_1(z)$ étant des fonctions entières de z, satisfaisant à des équations de la forme

$$G(z+\omega) = e^{az+b}G(z),$$
$$G(z+\omega') = e^{a'z+b'}G(z),$$

les a et les b étant des constantes, et les ω les périodes de la fonction $u(z)$.

III. *Étant donné un contour C et en supposant connue la fonction de Green relative à ce contour pour tout point intérieur, quelle est la formule permettant de trouver la fonction harmonique continue à l'intérieur et prenant des valeurs données sur C ?*

Appliquer le résultat au cas où le contour C est une circonférence.

Solution. — I. Soit la cubique prise sous la forme normale

$$x = pu, \qquad y = p'u.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que six points soient sur une conique est que les paramètres de ces six points aient une somme égale à une période, et pour qu'ils soient confondus, qu'on ait

$$6u = 2K\omega + 2K'\omega',$$
$$u = \frac{K}{6}2\omega + \frac{K'}{6}2\omega'.$$

Chacun des entiers K et K' peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, ce qui donne $6^2 = 36$ points.

Parmi ces points se trouvent les neuf points d'inflexion, obtenus en considérant les tangentes d'inflexion comme des droites doubles. Il reste $6^2 - 3^2 = 27$ points de contact de véritables coniques osculatrices.

Si v est le paramètre d'un de ces points d'inflexion, on a

$$3v = \text{Période},$$

et si w est le paramètre du point de contact de l'une des trois tangentes menées par ce point, on a

$$v + 2w = \text{Période}.$$

L'élimination de v donne

$$6w = \text{Période}.$$

Les points w sont donc ceux où la conique surosculatrice a un contact de cinquième ordre.

II. La double périodicité de $u(z)$ est établie dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard, 2e vol., p. 38 (3e édition), ainsi que l'existence d'un seul pôle double a dans un parallélogramme de périodes, pôle à résidu nul. Si l'on substitue le développement

$$u = \frac{\alpha}{(z-a)^2} + \beta + \gamma(z-a) + \ldots$$

dans la relation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \mathrm{A}u^3 + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{C}u + \mathrm{D},$$

on obtient par identification

$$\alpha = \frac{4}{\mathrm{A}}.$$

Par suite

$$\mathrm{H}(z) = \int_{z_0}^{z} \mu u(z)\,dz = -\frac{4\mu}{\mathrm{A}}\,\frac{1}{z-a} + \text{Fonction entière de } z.$$

$\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}(z)\,dz$ contiendra un terme logarithmique, et

$$e^{\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}(z)\,dz}$$

contiendra le facteur $(z-a)^{-\frac{4\mu}{\mathrm{A}}}$. Cette dernière fonction sera entière en z si $-\frac{4\mu}{A}$ est un entier positif m. D'où

$$\mu = -\frac{mA}{4}.$$

a sera un zéro d'ordre m pour l'exponentielle.

Soit $G(z)$ la valeur de $e^{\int_{z_0}^{z} H(z)\,dz}$ correspondant à $m = 2$, fonction entière qui a pour racines doubles tous les pôles de $u(z)$ et n'en admet pas d'autres. La fonction

$$G_1(z) = G(z)u(z)$$

est une fonction entière, les pôles de $u(z)$ étant les racines de $G(z)$, au même ordre 2 ; G et G_1 ne peuvent avoir de racines communes, G n'ayant pour racines que les pôles de u et G_1 n'admettant plus ces racines.

Par dérivation logarithmique, on obtient

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = -\int_{z_0}^{z} \frac{A}{2}\, u(z)\,dz;$$

on en déduit, ω étant l'une des périodes de $u(z)$,

$$\frac{G'(z+\omega)}{G(z+\omega)} - \frac{G'(z)}{G(z)} = -\int_{z}^{z+\omega} \frac{A}{2}\, u(z)\,dz.$$

Le second membre ne dépend pas de z, à cause de la périodicité de $u(z)$ et de la nullité de ses résidus. Soit a sa valeur constante; une intégration donne, b étant une autre constante

$$G(z+\omega) = e^{az+b}G(z).$$

L'autre période ω' donnerait lieu à une relation analogue.

III. La formule fondamentale demandée est

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\operatorname{Log} r\frac{dU}{dn} - U\,\frac{d \operatorname{Log} r}{dn}\right) dS;$$

elle est établie notamment dans le *Traité* de M. Picard, 2e vol., p. 14.

Le cas où C est une circonférence y est aussi développé et conduit à la formule

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{U(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi,$$

où l'on a $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, et où U sous le signe $\int$ est pris pour le point $(R\cos\psi, R\sin\psi)$ de la circonférence.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'intégrale elliptique de seconde espèce*

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}}$$

a deux *périodes qui sont fonctions de x. Former l'équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients rationnels en x, à laquelle satisfont ces périodes.*

SOLUTION. — Considérons les intégrales

$$\Omega = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{R}}, \qquad \Omega_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{R}},$$

$$H = \int_0^x \frac{u\,du}{\sqrt{R}}, \qquad H_1 = \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{R}},$$

$$L = \int_0^x \frac{du}{(u-1)\sqrt{R}}, \qquad L_1 = \int_0^1 \frac{du}{(u-x)\sqrt{R}};$$

où $R = u(u-1)(u-x)$.

H et H_1 sont les périodes considérées.

1° On obtient par dérivation

$$2\frac{d\Omega_1}{dx} = \int_0^1 \frac{du}{(u-x)\sqrt{R}} = L_1,$$

$$2\frac{dH_1}{dx} = \int_0^1 \frac{u\,du}{(u-x)\sqrt{R}} = \Omega_1 + xL_1,$$

et l'on a identiquement

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{R}}{u-x}\right) = \frac{u^2 - 2ux + x}{2(u-x)\sqrt{R}},$$

ou

$$H_1 - x\Omega_1 + x(1-x)L_1 = 0.$$

Éliminons Ω_1 et L_1 entre les trois relations établies; à cet effet nous leur adjoindrons :

$$2\frac{d^2H_1}{dx^2} = \frac{3L_1}{2} + x\frac{dL_1}{dx},$$

$$\frac{dH_1}{dx} = -\frac{3x-2}{2}L_1 + x(1-x)\frac{dL_1}{dx}.$$

Il vient d'abord

$$2x\frac{dH_1}{dx} = H_1 + xL_1,$$

$$\frac{dH_1}{dx} = 2(1-x)\frac{d^2H_1}{dx^2} - \frac{1}{2}L_1,$$

et enfin,

$$4x(1-x)\frac{d^2H_1}{dx^2} - 4x\frac{dH_1}{dx} + H_1 = 0.$$

2° Posons

$$u = tx, \qquad \rho = t(t-1)(tx-1).$$

Nous aurons

$$\Omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\rho}}, \qquad H = x\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{\rho}}, \qquad L = \int_0^1 \frac{dt}{(tx-1)\sqrt{\rho}};$$

$$2x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \Omega + L = 0;$$

$$2x\frac{\partial H}{\partial x} + \Omega + L - H = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{\rho}}{tx-1}\right) = \frac{t^2x - 2t + 1}{2(tx-1)\sqrt{\rho}};$$

$$H - \Omega + (x-1)L = 0;$$

$$2x\frac{d\Omega}{dx} + H + Lx = 0, \qquad 2\frac{dH}{dx} + L = 0,$$

$$\frac{dH}{dx} - \frac{d\Omega}{dx} + L + (x-1)\frac{dL}{dx} = 0;$$

$$4x(1-x)\frac{d^2H}{dx^2} - 4x\frac{dH}{dx} + H = 0.$$

On retrouve l'équation obtenue au 1°.

3° Cela devait être; car si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, on obtient

$$H_1(x) = \sqrt{y}\int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{u(u-1)(uy-1)}} = \frac{H(y)}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{dH_1}{dx} = -\sqrt{y}\left[y\frac{dH}{dy} - \frac{1}{2}H\right];$$

$$\frac{d^2H_1}{dx^2} = \sqrt{y}\left[y^3\frac{d^2H}{dy^2} \pm y^2\frac{dH}{dy} - \frac{1}{4}yH\right];$$

Multiplions ces égalités respectivement par 1, $-4x = -\frac{4}{y}$, $4x(1-x) = \frac{4(y-1)}{y^2}$,
et ajoutons membre à membre; il vient :

$$4x(1-x)\frac{d^2H_1}{dx^2} - 4x\frac{dH_1}{dx} + H_1$$
$$+\sqrt{y}\left[4y(1-y)\frac{d^2H}{dy^2} - 4y\frac{dH}{dy} + H\right] \equiv 0.$$

Donc $H_1(x)$ et $H(y)$ vérifient la même équation différentielle. (Juin 1919.)

Épreuve théorique. — I. *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans une aire limitée par un contour* C, *et un point* z_0 *à l'intérieur de cette aire. On désigne par* M *le maximum de* $|F(z)|$ *sur* C. *Montrer que l'on a*

$$|F(z_0)| < M.$$

Si l'on avait $|F(z_0)| = M$, *que pourrait-on dire de la fonction* $F(z)$?

II. *Soit* $f(x)$ *une fonction continue de la variable réelle* x *dans l'intervalle* (a, b). *Cette fonction peut-elle satisfaire aux conditions en nombre infini*

$$\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0,$$

n prenant les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, \infty$?

III. ω *et* ω' *étant deux constantes complexes, telles que* *dans le rapport* $\frac{\omega'}{\omega}$, *le coefficient de i soit positif, trouver toutes les fonctions* $\Theta(z)$, *holomorphes dans tout le plan telles que :*

$$\Theta(z+\omega) = \Theta(z), \qquad \Theta(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z).$$

Le réseau de parallélogrammes correspondant à ω *et* ω' *étant construit, combien l'équation* $\Theta(z) = 0$ *a-t-elle de racines dans un parallélogramme?*

IV. *Soit dans le plan* xOy, *un arc de courbe* AB, *correspondant à la relation*

$$y = f(x) \qquad (a < x < b),$$

montrer par un exemple qu'il existe des fonctions analytiques de $z = x + iy$, *définies d'un côté de la courbe* AB *mais ne pouvant pas être prolongées analytiquement au delà de cette ligne.*

Solution. — I. La propriété est une conséquence de la formule de Cauchy :

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Si l est la longueur de C et δ la moindre distance de z_0 à C, on a $|F(z_0)| \leqq \frac{Ml}{2\pi\delta}$, et *a fortiori* $|F(z_0)| < M$.

Si $|F(z_0)| = M$, la fonction $F(z)$ est constante à l'intérieur de C; si elle ne l'était pas, son module, dans un cercle suffisamment petit, de centre z_0, serait inférieur à M : et la valeur de $|F(z_0)|$, égale au module de la valeur moyenne de $F(z)$ dans ce cercle, ne saurait être M.

II. Les conditions admises entraînent évidemment la relation

$$\int_a^b f(x)P(x)\,dx = 0 \qquad (b > a),$$

$P(x)$ étant un polynome de degré quelconque. Supposons que ce polynome soit celui qui, dans l'intervalle (a, b) diffère de $f(x)$, en module, de moins de ε, ε étant un nombre positif, donné à l'avance aussi petit qu'on veut, soit $P(x, \varepsilon)$. Nous aurons

$$\int_a^b P^2(x, \varepsilon)\,dx = \int_a^b P(x, \varepsilon)[P(x, \varepsilon) - f(x)]\,dx$$
$$< \varepsilon \left| \int_a^b P(x, \varepsilon)\,dx \right|.$$

Faisons tendre ε vers zéro. Si $P(x, \varepsilon)$ ne tendait pas vers zéro, nous aurions une contradiction. Donc $f(x)$ est égal à zéro dans l'intervalle (a, b).

III. Soit $\varphi(z) = \operatorname{Log}\Theta(z)$; les zéros d'une fonction entière $\Theta(z)$ [s'il en existe] sont, d'après les relations de condition, distribués périodiquement dans le plan; soient $a_1 \ldots a_n$ leurs arguments dans le parallélogramme (ω, ω'). On a

$$2\pi i n = \int d\varphi(z), \qquad 2\pi i \sum a = \int z\,d\varphi(z),$$

les intégrales étant prises dans le sens direct le long d'un parallélogramme (ω, ω'). On obtient immédiatement :

$$n = 1, \qquad a = \frac{\omega + \omega'}{2} + \text{Période}.$$

Considérons alors la fonction

$$\Theta_1(z) = e^{Az^2+Bz}\sigma\left(z - \frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

la fonction σ étant construite avec les périodes (ω, ω'); elle a le zéro de Θ et se reproduit multipliée par une exponentielle linéaire en z. Voyons s'il est possible de déterminer les coefficients A et B de manière que $\Theta_1(z)$ satisfasse aux conditions proposées. Nous obtenons les relations

$$\begin{gathered}
\eta + A\omega = 0, \\
\eta' + A\omega' = -\frac{\pi i}{\omega}, \\
-\eta\omega' + \pi i + A\omega^2 + B\omega = 0, \\
-\eta'\omega + \pi i + A\omega'^2 + B\omega' = -\frac{\pi i \omega'}{\omega}.
\end{gathered}$$

Comme $\eta\omega' - \eta'\omega = \pi i$, ces relations sont compatibles et donnent

$$A = -\left(\frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta'}{\omega'} + \pi i\right), \qquad B = \eta + \eta'.$$

La fonction $\frac{\theta}{\theta_1}$ est une fonction elliptique sans pôle et se réduit à une constante C. Donc

$$\theta(z) = Ce^{-\left(\frac{\eta}{\omega}+\frac{\eta'}{\omega'}+\frac{\pi i}{\omega\omega'}\right)\frac{z^2}{2}+(\eta+\eta')z}\,\sigma\left(u - \frac{\omega+\omega'}{2}\right).$$

La symétrie est apparente, η et η' ne jouant pas des rôles symétriques; le coefficient de z^2 est $-\frac{\eta}{\omega}$.

IV. Considérons la série

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z},$$

dans laquelle : 1° les coefficients A_n sont tels que la série

$$\sum |A_n|$$

soit absolument convergente; 2° les points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont distribués sur l'arc AB de manière que, sur toute portion finie de cet arc, il y en ait une infinité.

$\varphi(z)$ est convergente en tout point non situé sur AB et représente une fonction holomorphe dans le domaine de ce point; mais le cercle de convergence relatif à ce point ne peut jamais contenir une portion de l'arc AB, si petite soit-elle. D'où l'impossibilité du prolongement analytique de $F(z)$ à travers la moindre portion de AB (*Cf.* Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 2e éd., p. 252-253).

Épreuve pratique. — *Dans le plan* xOy *on considère la moitié supérieure du cercle de centre* O *et de rayon* un *situé au-dessus de* Ox. — 1° *Résoudre pour cette aire, le problème de Dirichlet, les valeurs données pour la fonction harmonique étant* zéro *pour le diamètre* AB *et* un *pour la demi-circonférence* ACB (*on pourra chercher à mettre la solution sous forme trigonométrique*).

2° *Quand le point* $M(x, y)$ *tend vers* B *suivant une direc-*

tion telle que MBO $= \alpha$, *quelle est en* B *la limite de la fonction harmonique?*

Solution. — 1° Le développement de Fourier

$$U = a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n,$$

nul pour $\theta = 0$ ou π quel que soit r compris entre 0 et 1, se réduit à

$$U = \sum_1^\infty b_n \sin n\theta\, r^n$$

Comme on doit avoir sur la demi-circonférence $U = 1$ et $r = 1$,

$$1 = \sum_1^\infty b_n \sin n\theta.$$

Or on sait que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{\sin(2p+1)\theta}{2p+1}.$$

Il vient donc

$$U = \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{r^{2p+1} \sin(2p+1)\theta}{2p+1} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right).$$

2° Quand le point M se déplace suivant la direction MB, on a

$$r = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)},$$

$$U = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{2\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)\sin\theta}{\sin^2(\alpha+\theta)-\sin^2\alpha}\right].$$

Si l'on fait tendre θ vers zéro, l'argument a pour limite $\operatorname{tang}\alpha$, donc

$$U_B = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

On obtient 0 et 1 si l'on tend vers B en suivant le diamètre OB et la circonférence CB. (Octobre 1919.)