Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 193-199

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__193_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

893.

(1868, p. 336 ; 1916, p. 321).

Si l'on coupe un tore, ou plus généralement une cyclide, par une série de sphères ayant pour centre un point fixe donné, toutes les courbes d'intersection ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône du deuxième degré.

E. LAGUERRE.

Solution

Par M. R. B.

Montrons que, d'une manière générale :

Si l'on coupe par une série de sphères concentriques la surface inverse d'un cône quelconque, toutes les courbes ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône.

Soient en effet C un cône quelconque de sommet A, Γ son inverse par rapport à un point O, S une sphère quelconque, Σ son inverse par rapport à O.

La courbe (C, S) est anallagmatique par rapport au point A. Il en est donc de même, comme il est classique, de la courbe (Γ, Σ). Cette courbe appartient donc à un cône C′, de sommet A′, chaque génératrice de ce cône contenant deux points de (Γ, Σ).

Il faut montrer que le cône C′ ne varie pas de grandeur lorsque S varie de telle manière que Σ conserve un centre fixe ω. Or, soient D une génératrice quelconque de C, P le plan (O, D), M et N les deux points où D coupe S, μ et ν leurs inverses. La droite D est l'inverse du cercle Oμν. Autrement dit, μν est la corde commune au cercle Δ, inverse de D et au cercle (P, S). Soient I le centre du cercle Δ, ω′ la projection de ω sur le plan P. μν est perpendiculaire à Iω′ et par suite à Iω. La direction de cette droite dans un plan P donné est donc indépendante du rayon de la sphère Σ. Autrement dit, deux cônes C′, correspondant à deux sphères Σ concentriques, ont leurs génératrices deux à deux parallèles. Ces deux cônes (dont les sommets sont deux points de la droite OA) sont donc homothétiques, et par conséquent égaux. C. Q. F. D.

Si le cône C est du second ordre, la courbe (C, S) est une *cyclique*, dont l'inverse est, comme on le sait, une courbe de même nature, et le cône C′ est aussi du second ordre. Quant à l'inverse de C, c'est une cyclide à deux points doubles (une cyclide de Dupin, si C est de révolution).

L'énoncé 893 est donc valable pour les cyclides à deux points doubles, en prenant le mot *cyclide* dans son sens général : surface de quatrième ordre admettant l'ombilicale comme conique double.

Pour les propriétés des anallagmatiques, des cycliques et des cyclides invoquées dans cette solution, on pourra consulter l'Ouvrage de G. Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

2045.

(1906, p. 432.)

Soient (A, A′), (B, B′), (C, C′) *trois couples de semi-droites d'un même plan, les semi-droites d'un même couple étant parallèles et de même sens. Les cycles inscrits dans les quatre triangles* (A, B, C), (A, B′, C′), (A′, B, C′), (A′, B′, C) *sont tangents à un même cycle. Il en est de même des cycles inscrits dans les triangles* (A′, B, C), (A, B′, C), (A, B, C′), (A′, B′, C′).

Le théorème est encore vrai si les semi-droites d'un même couple sont parallèles et de sens contraires. On obtient comme cas particulier de cette dernière proposition le théorème de Feuerbach et le théorème suivant :

Soient ABC *un triangle,* A′, B′, C′ *les milieux de ses côtés. Les cercles inscrits dans les quatre triangles* A′B′C′, AB′C′, A′BC′, A′B′C, *sont tangents à un même cercle.*

La première proposition donne des théorèmes où interviennent des centres exinscrits. R. Bricard.

Solution
Par L'Auteur.

Ce théorème est démontré dans mon article *Sur le problème d'Apollonius et quelques propriétés des cycles* (1907, p. 491). *Voir* aussi l'article de M. M. Fouché *Sur le problème d'Apollonius* (1908, p. 116).

2315.

(1917, p. 199.)

Les droites sur lesquelles quatre plans donnés déterminent une division de rapport anharmonique constant *forment un complexe du second degré. Si les quatre plans sont les plans des faces du tétraèdre de référence, l'équation du complexe est*

$$\frac{ps}{A} = \frac{qt}{B}\left(= \frac{ru}{C}\right) \qquad \text{avec} \qquad A + B + C = 0.$$

G. Fontené.

Solution

Par M. J. Lemaire.

Nous modifierons légèrement les notations de l'énoncé : si x, y, z, t et x', y', z', t' sont les coordonnées de deux points quelconques, nous représentons par

$$\begin{aligned} l &= xy' - yx', & p &= zt' - tz', \\ m &= xz' - zx', & q &= ty' - yt', \\ n &= xt' - tx', & r &= yz' - zy', \end{aligned}$$

les coordonnées pluckériennes (ponctuelles) de la droite qui joint ces points, coordonnées liées par l'identité

$$(1) \qquad lp + mq + nr \equiv 0.$$

Cherchons l'un des rapports anharmoniques des points où la droite rencontre les plans qui forment le tétraèdre de référence : les coordonnées de tout point de la droite étant de la forme

$$hx + kx', \qquad hy + ky', \qquad hz + kz', \qquad ht + kt',$$

les quatre points correspondent aux valeurs de h et k ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{trace sur : } X = 0 &: h = x', & k &= -x, \\ Y = 0 &: h' = y', & k' &= -y, \\ Z = 0 &: h'' = z', & k'' &= -z, \\ T = 0 &: h''' = t', & k''' &= -t. \end{aligned}$$

Un des rapports anharmoniques du système de ces points a pour valeur (1)

$$\frac{\frac{h}{k}-\frac{h''}{k''}}{\frac{h}{k}-\frac{h'''}{k'''}}:\frac{\frac{h'}{k'}-\frac{h''}{k''}}{\frac{h'}{k'}-\frac{h'''}{k'''}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{hk''-hk''}{hk'''-hk'''}:\frac{h'k''-k'h''}{h'k'''-k'h'''},$$

ou encore

$$\frac{xz'-zx'}{xt'-tx'}:\frac{yz'-zy'}{yt'-ty'},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{m}{n}:\frac{r}{-q} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{mq}{nr}.$$

Le complexe des droites pour lesquelles ce rapport anharmonique a une valeur constante $-\frac{B}{C}$ a donc pour équation

$$(2) \qquad \frac{mq}{B}=\frac{nr}{C}$$

ou, en tenant compte de l'identité (1),

$$\frac{lp}{A}=\frac{mq}{B}=\frac{nr}{C}$$

avec la condition

$$A+B+C=0.$$

Réciproquement, tout complexe qui a une équation de la forme (2) est *un complexe tétraédal,* c'est-à-dire un complexe de droites sur lesquelles les plans des faces du tétraèdre de référence déterminent une division de quatre points dont un des rapports anharmoniques a une valeur donnée.

Remarque. — Si une droite est déterminée par deux plans

$$uX+vY+wZ+sT=0,$$
$$u'X+v'Y+w'Z+s'T=0,$$

(1) Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 25.

on peut prendre aussi pour coordonnées pluckériennes (tangentielles) de la droite les quantités

$$\begin{aligned} \lambda &= uv' - vu', & \pi &= ws' - sw', \\ \mu &= uw' - wu', & \chi &= sv' - vs', \\ \nu &= us' - su', & \rho &= vw' - wv', \end{aligned}$$

liées par l'identité

$$\lambda\pi + \mu\chi + \nu\rho \equiv 0.$$

On voit aisément que

$$\frac{l}{\pi} = \frac{m}{\chi} = \frac{n}{\rho} = \frac{p}{\lambda} = \frac{q}{\mu} = \frac{r}{\nu}.$$

Écrivant, en effet, que le point (x, y, z, t) est sur la droite, on a

$$\begin{cases} ux + vy + wz + st = 0, \\ u'x + v'y + w'z + s't = 0, \end{cases}$$

d'où, en éliminant x,

$$\lambda y + \mu z + \nu t = 0;$$

on aurait de même

$$\lambda y' + \mu z' + \nu t' = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{zt' - tz'}{\lambda} = \frac{ty' - yt'}{\mu} = \frac{yz' - zy'}{\nu},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{q}{\mu} = \frac{r}{\nu};$$

on obtiendrait les autres relations par un calcul analogue.

L'équation générale des complexes tétraédraux établie ci-dessus, que l'on peut mettre sous la forme

$$(2') \qquad A'lp + B'mq + C'nr = 0,$$

A', B', C' désignant des constantes arbitraires, peut aussi être écrite

$$A'\lambda\pi + B'\mu\chi + C'\nu\rho = 0. \quad (3)$$

On déduirait aisément de ce qui précède la propriété fondamentale suivante : le système des quatre points déterminés par les faces d'un tétraèdre sur une droite quelconque a les mêmes rapports anharmoniques que le faisceau des plans déterminés par la droite et les sommets du tétraèdre ; de sorte que les équations (2′) et (3) représentent toutes deux le complexe des droites dont les traces sur les plans du tétraèdre de référence ont un rapport anharmonique donné, ou des droites qui déterminent avec les sommets du tétraèdre des plans ayant ce même rapport anharmonique.

Autres solutions par M. R. Bouvaist, un *Abonné*.

2316.

(1917, p. 199.)

Soient α, β, γ *les points où un diamètre* δ *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *coupe les côtés ;* α', β', γ' *les symétriques de* α, β, γ *par rapport au centre du cercle* ABC ; α'', β'', γ'' *les inverses triangulaires de* α', β', γ'. *Démontrer que les segments* $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ *sont parallèles et que leurs milieux appartiennent à une droite qui passe par l'orthocentre du triangle et par l'orthopôle du diamètre* δ.

R. Goormaghtigh.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient OH l'orthocentre de ABC, O le centre du cercle circonscrit au triangle, ω le centre de l'hyperbole équilatère inverse de $\alpha\beta\gamma$, D le quatrième point d'intersection de cette hyperbole avec le cercle ABC. Le faisceau $A(\alpha' o \alpha \infty)$ est harmonique; si par suite a désigne l'intersection de la tangente en A à l'hyperbole ABCD avec $H\omega D$, m_1 l'intersection de $A\alpha''$ avec $H\omega D$, le faisceau $A(m_1 H a D)$ sera harmonique; en d'autres termes, $A\alpha''$ est la polaire de a par rapport à l'hyperbole ABCD, et m_1, milieu de $A\alpha''$, se trouve sur $H\omega D$. Il en est évidemment de même des milieux m_2 et m_3 de $B\beta''$, $C\gamma''$.