Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 17-30
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__17_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Méthode d'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre*

$$Ap + Bq = C,$$

où A, B, C *sont des fonctions données de* x, y, z.

Application. — Intégrale *générale de*

$$xzp + yzq = x^2 + y^2 + 2z^2.$$

Surface intégrale particulière contenant la courbe

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

SOLUTION. — L'application de la méthode classique conduit aux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2},$$

(1) *Voir* BROCARD et LEMOYNE, *Courbes géométriques remarquables*, t. I, p. 270.

donnant les deux intégrales

$$\frac{y}{x} = \text{const.}, \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2)^2} = \text{const.}$$

L'intégrale générale est ainsi

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

et l'intégrale particulière est

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{R^2}.$$

II. *On donne une courbe gauche* (C) *pour laquelle les coordonnées d'un de ses points* M *sont des fonctions connues de l'arc* AM *de la courbe, compté à partir d'un point fixe* A *de la courbe. On mène en* M, *à la courbe* (C), *la tangente* $M\xi$, *la normale principale* $M\eta$ *et la binormale* $M\zeta$ *dans les sens habituels. Soit* u *une fonction déterminée de l'arc* AM. *On mène la droite* MD *dont les paramètres directeurs par rapport à* $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ *sont* $(1, 1, u)$. *Cette droite* MD *engendre une surface réglée* (Σ) *lorsque le point* M *se déplace sur la courbe* (C). *On demande :*

1° *Comment on doit choisir la fonction* u *pour que la courbe* (C) *soit ligne de striction pour la surface* Σ. *On montrera que la solution de cette question s'obtient par quadratures.*

2° *Comment on doit choisir la fonction* u *pour que la surface* (Σ) *soit développable. On montrera que la solution de cette question dépend d'une équation de Riccati. Peut-on intégrer cette équation lorsque la courbe* (C) *est une hélice quelconque?*

Solution. — Par rapport aux axes $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$, le plan tangent en M à Σ est

$$\eta u - \zeta = 0.$$

Pour avoir le plan tangent à Σ au point à l'infini sur MD, il faut prendre le plan tangent au cône directeur décrit par la droite dont les paramètres directeurs dans des axes fixes sont

$$\lambda = \alpha + \alpha' + \alpha'' u, \qquad \mu = \beta + \beta' + \beta'' u, \qquad \nu = \gamma + \gamma' + \gamma'' u.$$

Les coefficients de ce plan seront $\frac{d\lambda}{ds}, \frac{d\mu}{ds}, \frac{d\nu}{ds}$ ou, par application des formules de Frenet et en revenant aux axes mobiles,

$$-\frac{1}{R}, \frac{1}{R} + \frac{u}{T}, -\frac{1}{T} + \frac{du}{ds}.$$

On aura ainsi le plan tangent cherché à Σ :

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ 1 & 1 & u \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{u}{T} & -\frac{1}{T} + \frac{du}{ds} \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe (C) sera ligne de striction si ces deux plans tangents sont rectangulaires, ce qui donne une équation linéaire en u^2.

La surface Σ sera développable s'ils sont confondus; on est ainsi conduit à une équation de Riccati dans laquelle les variables se séparent quand (C) est une hélice, parce qu'alors le rapport $\frac{R}{T}$ est constant.

Épreuve pratique. — *Calculer, en appliquant le théorème des résidus, l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{5 + 4 \cos x}\, dx.$$

Solution. — Posant $t = e^{ix}$, l'intégrale devient

$$I = -\frac{i}{8} \int \frac{(t^2+1)^3 + i(t^2-1)^3}{t^3[2t^2 + 5t + 2]}\, dt,$$

prise le long d'une circonférence de rayon 1, ayant l'origine pour centre. Sa fonction admet, à l'intérieur de ce cercle, le pôle $t = 0$ de résidu $\frac{33 - 9i}{8}$ et le pôle $t = -\frac{1}{2}$ de résidu $-\frac{125}{24} + \frac{9i}{8}$. On en déduit pour I la valeur $-\frac{13\pi}{48}$.

(Bordeaux, juin 1919.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donnés trois axes rectangulaires et une surface* S, *d'un point quelconque* M *de cette surface, on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ, *sur* Ox *et* Oy. *Former l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la surface* S *pour que la normale* MN *à cette surface soit contenue dans le plan* PMQ, *quel que soit le point* M *pris sur la surface* S. *Intégrer l'équation obtenue. Déterminer la surface* S *qui contient la droite* $x = 0$, $y = z$.

SOLUTION. — On arrive immédiatement à l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

dont l'intégrale générale s'obtient facilement,

$$2z^2 = -x^2 - y^2 + f(x^2 - y^2),$$

et donne l'intégrale particulière demandée

$$z^2 - y^2 + 2x^2 = 0.$$

II. *On donne en coordonnées rectangulaires une surface réglée* S *ayant pour équations*

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = V + \rho W,$$

ρ *et* θ *étant deux paramètres indépendants et* V, W *deux fonctions données du seul paramètre* θ. *On demande :*

1° *De former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface et de montrer qu'elle s'intègre par quadrature.*

2° *Comment il faut choisir la fonction* W *pour que les lignes asymptotiques, autres que les génératrices, se projettent sur le plan des* xy *suivant des courbes homothétiques entre elles par rapport à l'origine des coordonnées. Montrer que la surface* S *est, dans ce cas, un conoïde. Pouvait-on prévoir géométriquement ce résultat ?*

SOLUTION. — 1° On a, pour les lignes asymptotiques, l'équation de Bernoulli

$$2\frac{dV}{d\theta}\frac{d\rho}{d\theta} - \rho\frac{d^2V}{d\theta^2} - \rho^2\left[W + \frac{d^2W}{d\theta^2}\right] = 0$$

qui s'intègre en posant $u = \frac{1}{\rho}$ et donne ainsi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\frac{dV}{d\theta}}}\left[C - \int \frac{W + \frac{d^2W}{d\theta^2}}{2\sqrt{\frac{dV}{d\theta}}}\,d\theta\right].$$

2° Il faut que l'équation différentielle ne change pas quand on multiplie ρ par une constante, donc que

$$W + \frac{d^2W}{d\theta^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad W = a\cos\theta + b\sin\theta,$$

et la surface est un conoïde dont les génératrices rencontrent Ox et sont parallèles au plan $z = ax + by$.

Géométriquement : les projections sur le plan des xy forment une famille de courbes homothetiques comprenant ainsi, comme ligne particulière, la droite de l'infini. De sorte que le point à l'infini sur une génératrice rectiligne variable décrit une ligne asymptotique.

Cette courbe à l'infini de S admet en chaque point comme plan osculateur le plan de l'infini en tant que ligne dans le plan de l'infini et le plan tangent à S en tant que ligne asymptotique de cette surface. Comme ces deux plans sont distincts, c'est une ligne à plan osculateur indéterminé, c'est-à-dire une droite; la surface est une surface réglée à plan directeur, et, comme toutes les génératrices rencontrent Oz, c'est forcément un conoïde.

Epreuve pratique. — *Calculer l'intégrale de variable complexe*

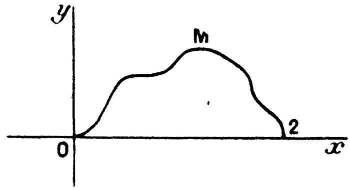
$$\int_0^2 \frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{2z-1}}$$

prise le long d'un chemin situé tout entier dans le premier angle des axes de coordonnées. Dans le résultat final on mettra en évidence la partie réelle et la partie imaginaire.

Solution. — On effectue le changement de variable

$$\sqrt{2z-1}=t$$

et l'on calcule la fonction primitive En prenant i comme



détermination initiale de $\sqrt{2z-1}$, on trouve pour valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}L(2-\sqrt{3})-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+i\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}L(2+\sqrt{3})-\frac{\pi}{4}\right].$$

(Bordeaux, novembre 1919.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *A quelle relation doivent satisfaire les deux coefficients p et q de l'équation différentielle linéaire du second ordre $y''+py'+qy=0$ pour que cette équation admette deux intégrales dont le quotient soit égal à la variable x? Former toutes les équations de l'espèce considérée, satisfaisant à la condition précédente, et telles de plus que le coefficient q soit constant. Indiquer les équations obtenues.*

II. *Quelle doit-être la forme de la fonction*

$$f(x,y,z,p,q)$$

pour que le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à l'équation aux dérivées partielles $f=0$ admette l'intégrale première

$$px+qy=\text{const.}?$$

Solution. — I. La relation demandée est

$$p^2+2p'=4q.$$

Les équations correspondant à q constant sont

$$y'' + 2\sqrt{q}\coth(x+\alpha)\sqrt{q}\,y' + qy = 0,$$

et leur intégrale générale est

$$y = \frac{(A + Bx)}{\operatorname{sh}(x+\alpha)\sqrt{q}},$$

α, A et B étant des constantes.

II. Il faut et il suffit que la fonction f satisfasse à l'équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + (px+qy)\frac{\partial f}{\partial z} - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

La forme la plus générale de cette fonction est

$$f = F\left(xe^{-\frac{z}{px+qy}},\ ye^{-\frac{z}{px+qy}},\ pe^{\frac{z}{px+qy}},\ qe^{\frac{z}{px+qy}}\right).$$

Épreuve pratique. — I. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}.$$

II. *La fonction* $y = \operatorname{tang} x$ *satisfait à l'équation différentielle* $y' = y^2 + 1$; *calculer au moyen de cette équation les cinq premiers coefficients différents de zéro du développement en série de* tang$x$ *suivant les puissances de* x *au voisinage de* $x = 0$.

Solution. — I. On sait qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

a étant compris entre 0 et 1. Remplaçons t par x^5 :

$$5\int_0^\infty \frac{x^{5a-1}\,dx}{1+x^5} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Pour $a = \frac{1}{5}$, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5} = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$

II. Pour $x = 0$, on a $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$, et, en général,

$$y_0^{(n+2)} = 2\left[yy^{(n+1)} + \frac{n}{1}y'y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{1.2}y''y^{(n-1)} + \ldots\right]_0.$$

Il vient nécessairement

$$\begin{array}{llll} y''_0 = 0, & y'''_0 = 2, & y_0^{(\text{IV})} = 0, & y_0^{(\text{V})} = 2^4, \\ y_0^{(\text{VI})} = 0, & y_0^{(\text{VII})} = 2^4.17, & y_0^{(\text{VIII})} = 0, & y_0^{(\text{IX})} = 2^8.31; \end{array}$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots.$$

(Lille, juillet 1919.)

Lyon.

Épreuve théorique. — *Soit, en axes rectangulaires, $xy = az$, l'équation d'un paraboloïde hyperbolique. D'un point* M (x, y, z), *on abaisse une droite* D *perpendiculaire sur le plan polaire du point* M *par rapport au paraboloïde. Quelle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S, *telles que, si* M *est un point de l'une quelconque de ces surfaces* S, *le plan tangent* Π *en* M *à* S *contienne la droite* D *correspondant à* M. *Intégrer cette équation. Courbes caractéristiques. Déterminer la surface intégrale de façon qu'elle contienne la droite $x + y = 1$, $z = b(x - y)$,* (b = const.). *Lignes asymptotiques de la surface intégrale particulière ainsi obtenue.*

Indications sur la solution. — L'équation aux dérivées partielles cherchée est

$$px + qy + a = 0.$$

La courbe caractéristique qui passe par le point (x, y, z) a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 = x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t, \\ y_1 = x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t, \\ z_1 = z - at. \end{cases}$$

La surface intégrale générale a pour équation

$$\frac{z}{a} = f(x^2 - y^2) - \log(x + y),$$

f étant une fonction arbitraire.

Celle qui contient la droite $x = 1 - y$, $z = b(x - y)$ a pour équation $z = b(x^2 - y^2) - a \log(x + y)$.

C'est une surface réglée. Les asymptotiques sont d'abord les génératrices rectilignes

$$\begin{cases} x + y = C, \\ z = bC(x - y) - a \log C, \end{cases}$$

puis une deuxième famille de courbes dont les projections sur XOY sont les hyperboles équilatères

$$[2b(x - y) - A](x + y) = a.$$

Epreuve pratique. — *Soit s l'arc de la lemniscate $r^2 = 2\cos(2\theta)$, compté à partir de l'origine. Montrer que $\frac{1}{r^2} = p(s; g_2, g_3)$, avec $g_2 = 1$, $g_3 = 0$. Arc total. Aire de la surface de révolution engendrée par la lemniscate en tournant autour de* OX.

Solution. — On a

$$s = \int_0^r \frac{2\,dr}{\sqrt{4 - r^4}},$$

et si $z = \frac{1}{r^2}$,

$$s = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - z}}.$$

L'arc total est 4ω, l'aire cherchée est $4\pi(2 - \sqrt{2})$.

(Lyon, juillet 1919.)

Epreuve théorique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$2xy\,dy + (x^2 - y^2 + 1)\,dx = 0;$$

2° *Expression génerale de ses facteurs intégrants;*
3° *Trajectoires orthogonales des courbes intégrales;*
4° *Montrer que le réseau formé par les courbes intégrales et leurs trajectoires orthogonales est un réseau de courbes isothermes.*

Indications sur la solution. — En posant $y^2 = \eta$, on est ramené à une équation linéaire. L'intégrale générale, cherchée par l'une quelconque des méthodes connues. sera donnée par l'équation $\frac{x^2+y^2-1}{x} = a =$ const., qui représente un faisceau de cercles passant par les deux points fixes réels $x = 0$, $y = \pm 1$.

$\frac{1}{x^2}$ est un facteur intégrant particulier, et φ désignant une fonction arbitraire de son argument $\frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\right)$ est le facteur intégrant le plus général. L'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$(x^2 - y^2 + 1)\,dy - 2xy\,dx = 0.$$

Elle admet $\frac{1}{y^2}$ comme facteur intégrant. L'intégrale générale $\frac{x^2+y^2+1}{y} = b =$ const. donne le faisceau de cercles associé du précédent.

Si l'on pose

$$x^2 + y^2 - 1 = ux,$$
$$x^2 + y^2 + 1 = vy,$$

et qu'on prenne u, v comme nouvelles coordonnées, on trouve

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \frac{(v\sqrt{u^2+4} + u\sqrt{v^2-4})^2(u^2+4)(v^2-4)}{4(u^2+v^2)} \\ &\quad \times \left[\frac{du^2}{(u^2+4)^2} + \frac{dv^2}{(v^2-4)^2}\right] \end{aligned}$$

et, de la forme du deuxième membre, il résulte que le réseau considéré est bien formé de courbes isothermes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Si* $z = x + iy$, *mettre* arc tang z *sous la forme* $X(x, y) + iY(x, y)$, X *et* Y *désignant des fonctions réelles des variables réelles* x, y. *Quelles sont les courbes* $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$?

Le point z *parcourt le segment de droite* $(0, 1 + i)$. *On part de l'origine avec la valeur* 0 *pour* arc tang z. *Avec quelle valeur de* arc tang z *arrive-t-on au point* $1 + i$?

Le point z *parcourt un cercle de centre* 0 *et de rayon* $\rho < 1$. *Quelle courbe parcourt le point* $u = \text{arc tang}\, z$?

INDICATIONS SUR LA SOLUTION :

$$\begin{aligned} u = \text{arc tang}\, z &= \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} \\ &= \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} + h\pi \\ &\quad + \frac{i}{4} \log \frac{x^2 + y^2 + 1 + 2y}{x^2 + y^2 + 1 - 2y} \qquad (h \text{ entier}). \end{aligned}$$

Les courbes $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$ forment le réseau isotherme déjà considéré dans le problème d'analyse

$$\text{arc tang}(1 + i) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{arc tang}\, 2 + i \log 5.$$

Enfin, la dernière courbe demandée a pour équation

$$(1 - \rho^2)^2 \,\text{tang}^2(2X) + (1 + \rho^2)^2 \,\text{th}^2(2Y) = 4\rho^2.$$

(Lyon, novembre 1919.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On pose*

$$x + ay = u, \qquad x - ay = v, \qquad z = f(u) + \varphi(v).$$

Choisir les fonctions arbitraires $f(u)$ *et* $\varphi(v)$ *de sorte que les surfaces représentées paramétriquement par ces équations soient développables.*

2° *Intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles*

$$ap + q + 2a = 0,$$

et déterminer celle des surfaces qui satisfait à cette équation et qui est circonscrite à la sphère de rayon R *donné dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

3° *Rapprocher les deux questions précédentes en supposant que a est donné le même dans les deux cas.*

Solution. — 1° On trouve $f''\varphi'' = 0$. Par exemple, on peut poser $z = A(x + ay) + B + f(x - ay)$, équation de cylindres avec une seule fonction arbitraire $B + f(x - ay)$ et une constante arbitraire A.

2°-3° L'intégrale générale peut être représentée par

$$z + x + ay = f(x - ay).$$

Elle représente des cylindres de la famille précédente quand $A = -1$.

L'intégrale particulière est

$$(1 + 5a^2)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - (ax + y - 2az)^2 = 0$$

ou encore

$$(z + 2ay)^2 + (2ax + az)^2 + (ay - x)^2 - R^2 = 0,$$

équation renfermant trois fonctions linéaires non indépendantes et, par conséquent, représentant un cylindre.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$mu - z\frac{du}{dz} + \frac{2z^m}{1 - z^2} = 0,$$

où m est un nombre entier positif donné, z la variable indépendante et u la fonction.

Le point z décrivant dans le plan des z l'un quelconque des cercles qui passent au point $z = +i$, à l'exclusion de ceux qui passeraient par les points singuliers, calculer les valeurs au point $z = +i$ de la fonction u de z qui cor-

respond à la valeur zéro de la constante arbitraire dans l'intégrale générale et leurs variations quand le point z revient au même point $z = + i$.

Distinguer, suivant ces variations, divers groupes de cercles.

SOLUTION. — L'intégrale générale est

$$u = z^m \left(\log \frac{z^2}{1 - z^2} + C \right).$$

et l'intégrale à étudier, correspondant à $C = 0$, est

$$u = z^m [2 \log z - \log(z - 1) - \log(z + 1) - \pi i].$$

La fonction a, dans le plan des z, trois points singuliers $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$. Les cercles passant par le point $z = +i$:

1° peuvent ne renfermer aucun des trois points;
2° peuvent entourer l'un de ces points;
3° peuvent entourer deux de ces points (-1 et 0, ou 0 et $+1$);
4° peuvent entourer les trois points.

Au point $z = + i$, on a

$$u = i^m [-\log 2 + (2k + 1)\pi i].$$

Quand le point z décrit l'un des cercles dans un sens connu, chaque point singulier entouré par le cercle correspond à une variation de $\pm 2\pi i$. D'ailleurs z^m reprenant la valeur de i^m, la variation de la fonction est $2n\pi i^{m+1}$, n étant un nombre entier positif, nul ou négatif facile à déterminer pour chaque groupe de cercles.

Un cercle fait donc, d'une manière générale, passer, au point $z = + i$, la valeur de u d'une de ses significations à une autre. (Marseille, juin 1919.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} - 2xy \left(x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} \right) - 2z(x^2 + y^2) = 0.$$

2° *Vérifier directement que la surface dont l'équation en coordonnées cartésiennes est $xyz = a$, la lettre a représentant une constante est une intégrale de cette équation, et déterminer de quelle manière elle se rattache à l'intégrale générale.*

3° *Déterminer les lignes de niveau et les lignes de pente de cette surface.*

4° *Existe-t-il sur cette surface des lignes asymptotiques réelles?*

SOLUTION. — L'intégrale générale est une relation arbitraire entre les fonctions $z e^{y^2-x^2}$ et $xy e^{x^2-y^2}$.

Les lignes de pente et les lignes de niveau ont pour projections les hyperboles $xy = \text{const.}$ et $x^2 - y^2 = \text{const.}$

On a $s^2 - rt = -\dfrac{3a^2}{x^4y^4}$; il n'y a donc pas de lignes asymptotiques réelles.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Calculer, en prenant le sens positif d'un cercle d'un rayon r plus petit que l'unité et ayant son centre à l'origine, les valeurs des trois intégrales*

$$\int \log(1+z)\,dz, \qquad \int \frac{\log(1+z)}{z}\,dz, \qquad \int \frac{\log(1+z)}{z^2}\,dz.$$

Séparer dans les résultats les parties réelles et les parties imaginaires et en conclure les valeurs de plusieurs intégrales définies réelles, en particulier de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \log(1+2r\cos\varphi+r^2)\cos\varphi\,d\varphi.$$

Plus généralement, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \log(a^2+ab\cos\varphi+b^2)\cos\varphi\,d\varphi,$$

quand a et b sont des nombres positifs donnés.

SOLUTION. — Voir les *Exercices de Frenet* pour les résultats. (Marseille, novembre 1919.)