

R. HARMEGNIES

**Sur une propriété caractéristique des
cylindres et du cylindroïde**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 178-180

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__178_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M³aα]

**SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES CYLINDRES
ET DU CYLINDROÏDE ;**

PAR M. R. HARMEGNIES.

On sait que les cylindres et le cylindroïde (ou conoïde de Plücker) sont tels que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices

est une courbe plane. Je me propose d'établir *géométriquement* que ce sont les seules surfaces réglées jouissant de cette propriété. Ce théorème a été établi analytiquement par M. Appell (1).

Considérons en effet deux génératrices quelconques G_1 et G_2 d'une telle surface et leur perpendiculaire commune P_1P_2 . Projetons un point P quelconque de P_1P_2 en P_3P_4 , sur deux autres génératrices G_3, G_4 également quelconques. Dans le cas du cylindroïde, P_3P_4 et P_1P_2 sont confondues avec l'axe de la surface ; éliminons ce cas, et supposons que P_1P_2, P_3P_4 déterminent un plan. Dans le cas du cylindre, ce plan est indépendant du point P choisi sur P_1P_2 ; éliminons encore ce cas, et supposons que ce plan tourne autour de P_1P_2 quand P décrit cette droite. Soit Q le point de rencontre de P_1P_2 et P_3P_4 ; on voit facilement que P et Q se correspondent homographiquement sur P_1P_2 . Un point double M de cette homographie sera tel que la droite MP_3P_4 , correspondante soit perpendiculaire commune à G_3 et G_4 . Si l'homographie a deux points doubles distincts, M et M' , la perpendiculaire commune à G_3 et G_4 , passant par M et M' , ne peut être que MM' ou P_1P_2 : on retrouve le cas du conoïde, à moins que G_3 et G_4 n'admettent plusieurs perpendiculaires communes ; elles sont alors parallèles et l'on retrouve le cas des cylindres.

Si les deux points doubles sont confondus (étant bien entendu qu'il en est ainsi quelles que soient les génératrices choisies), on voit que les perpendiculaires communes à deux génératrices quelconques se rencontrent. Supposons que G_4 se confonde avec G_1 ; les

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, p. 261.

perpendiculaires communes à G_1 , G_2 , G_3 prises deux à deux forment un triangle $P_1P_2P_3$, et chaque génératrice étant perpendiculaire au plan de ce triangle, on retrouve encore le cas des cylindres. *Une surface jouissant de la propriété indiquée ne peut donc être qu'un cylindre ou un conoïde droit.*

Dans ce dernier cas, si l'on projette sur un plan perpendiculaire à l'axe du conoïde, on voit que la projection de la courbe plane, lieu des projections d'un point A sur les génératrices, est le cercle qui admet pour extrémités d'un même diamètre la projection de l'axe et la projection de A . Cette courbe est donc une conique, et le conoïde admet comme courbes directrices: 1° une génératrice d'un cylindre de révolution; 2° la droite à l'infini du plan perpendiculaire; 3° une section plane du cylindre. C'est bien la définition du cylindroïde.