

M. D'OCAGNE

**Sur une homographie particulière et son
application à la perspective**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 89-92

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__89_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[Pb α] [K23a]

**SUR UNE HOMOGRAPHIE PARTICULIÈRE
ET SON APPLICATION A LA PERSPECTIVE;**

PAR M. M. D'OCAGNE.

Cette homographie peut être définie comme le produit d'une homologie par une rotation d'angle quelconque autour du pôle de cette homologie.

C'est sur sa considération qu'est fondé l'ingénieux procédé de mise en perspective du colonel de la Fresnaye, auquel est consacrée la Note 2 de l'*Appendice* de notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 349).

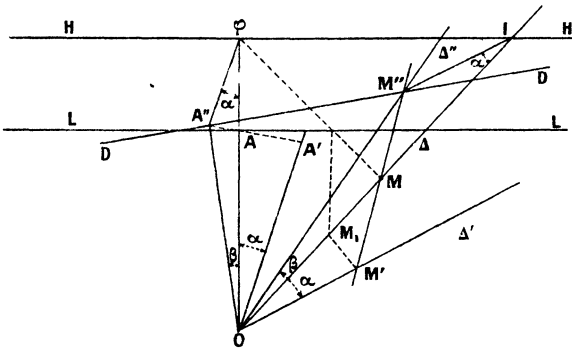
Le but de la présente Note est de faire connaître une démonstration extrêmement simplifiée d'une des propriétés fondamentales de cette homographie.

Rappelons d'abord sa définition précise : soit $[M_1]$ la figure homologique de $[M]$ pour le pôle O_1 et l'axe LL

d'homologie, et soit $[M']$ ce que devient $[M_1]$ après une rotation d'angle α quelconque (rétrograde sur la figure ci-jointe) autour du pôle O_1 .

. Le théorème de M. de la Fesnaye consiste en ce que, si DD est la droite double de l'homographie qui fait correspondre $[M']$ à $[M]$, et si cette droite est coupée par la droite MM' au point M'' , l'angle MOM'' est constant.

Soit β la grandeur de cet angle constant. Si cette grandeur est connue, ainsi que la droite DD , on voit comment on pourra construire le point M répondant à un point M' donné. Faisant pivoter autour du point O le faisceau invariable que forment, avec une droite Δ , deux autres droites Δ' et Δ'' respectivement inclinées sur la première des angles α et β , on



amène la droite Δ' à passer par le point M' ; la droite Δ'' coupe alors DD en un point M'' ; par M' et M'' on fait passer le bord d'une règle qui rencontre la droite Δ au point M cherché. Moyennant l'usage de ce faisceau et de cette règle, on peut donc marquer sur le plan la position du point M sans avoir à tracer aucune ligne de construction. Or, si LL est la ligne de terre,

φ le point principal de fuite, O le point situé sur la perpendiculaire abaissée de φ sur LL, à une distance φO de ce point égale à la distance principale, [M] est la perspective de la figure géométrale rabattue de front autour de LL en [M₁] et identique à [M']. Il suffit donc de fixer cette figure géométrale (au besoin dessinée sur un transparent) dans la position [M'] pour obtenir la perspective [M] *sans lignes de construction*. Tel est l'ingénieux procédé imaginé pour la mise en perspective du géométral par le colonel de la Fresnaye et qu'il a complété, en ce qui concerne la mise en hauteur, par la remarque bien simple que voici : *si z est la hauteur d'un point à mettre en perspective sur la verticale du point M, lorsqu'on fait tourner le faisceau mobile autour de O de façon que la distance du point M' à Δ' devienne égale à z, la distance du point M à la nouvelle position de Δ est égale à la hauteur mise en perspective au-dessus de M.*

La démonstration de la constance de l'angle MOM' et la détermination de la valeur de cet angle sont données, à l'endroit cité, sous une forme très simple que nous allons rappeler ici en quelques mots pour que le lecteur n'ait pas à s'y reporter :

En premier lieu, l'angle des rayons OM et OM' étant constant (égal à α), ces rayons engendrent deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les droites isotropes issues de O. Les droites doubles de l'homographie qui fait correspondre [M] à [M'] sont donc, outre la droite réelle DD, ces deux droites isotropes. Il en résulte, si la droite MM' rencontre une de ces droites isotropes en K, que le rapport anharmonique (MM'M''K) est constant, donc aussi celui du faisceau O (MM'M''K), et comme les angles que font

entre eux trois de ces rayons, OM , OM' et OK , sont constants, il en est de même de l'angle que fait le quatrième OM'' avec l'un quelconque d'entre eux.

Pour obtenir la grandeur de l'angle β , il suffit de construire un point M'' au moyen de deux couples de points M et M' pris sur les mêmes positions de Δ et Δ' . Faisons coïncider Δ avec OA et prenons sur cette droite les points A et φ situés à sa rencontre avec LI et HH , droite conjuguée de la droite à l'infini de $[M_1]$ (ligne d'horizon dans le cas de la perspective). Le point A_1 coïncidant alors avec A , le point A' s'obtient en faisant tourner OA de l'angle α autour de O , et le point φ_1 étant à l'infini sur OA , φ' est à l'infini sur OA' , ce qui montre que le point A'' s'obtient en faisant tourner φA de l'angle α (pris avec son sens) autour de φ ; joignant ensuite OA'' , on a, en AOA'' , la grandeur de l'angle β cherché.

Reste à déterminer la droite double DD qui se confond avec $A''M''$. Elle n'est autre que *la perpendiculaire élevée en A'' à OA''* . C'est cette dernière propriété qui se trouve assez laborieusement établie à l'endroit cité et qui, comme nous allons le faire voir ici, peut s'obtenir très simplement.

Si nous considérons le point de rencontre I de OM et de HH , son correspondant I_1 est à l'infini sur OM ; donc I' est à l'infini sur OM' et la droite II' , qui passe par M'' , est parallèle à OM' . Il en résulte que le triangle OIM'' est de similitude constante et, par suite, que le rayon vecteur OI fait avec le lieu de I , qui est la droite HH , le même angle que OM'' avec le lieu de M'' , qui est la droite DD . Lorsque le point I vient en φ , le point M'' vient en A'' ; donc, de même que la droite HH est perpendiculaire à $O\varphi$ en φ , la droite DD est perpendiculaire à OA'' en A'' . C. Q. F. D.