NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur l'aire d'un polygone

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 426-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__426_1>

[$K^1 9 a \alpha$]

SUR L'AIRE D'UN POLYGONE;

PAR M. V. JAMET.

AVANT-PROPOS.

Dans la pratique de l'arpentage, on considère comme irréductible la notion expérimentale de l'aire d'un polygone, et l'on admet (avec raison) que cette aire est égale à la somme des aires des polygones partiels dans lesquels on peut le décomposer.

Mais comme cette décomposition est possible d'une infinité de manières, on peut se demander, en se plaçant à un point de vue plus scientifique, si la somme trouvée sera toujours la même, quel que soit le procédé de décomposition adopté. Le présent travail a pour but de répondre à cette question. Les deux premiers paragraphes se rapportent au cas d'un polygone décomposé en triangles ayant un sommet commun, et dont les bases sont les côtés du polygone. Les formules de la géométrie analytique nous permettent de conclure que la somme des aires de ces triangles est indépendante de la position occupée par leur sommet commun, et aussi d'exprimer l'aire du polygone en fonction des coordonnées de ses sommets, cette aire, étant, par définition, somme des aires des triangles.

Dans les trois paragraphes suivants, nous profitons de l'expression trouvée pour montrer que, quels que soient les polygones partiels dans lesquels on a décomposé le polygone total, la somme de leurs aires est toujours la même, et pour indiquer brièvement comment on peut rattacher à notre théorie la quadrature d'un segment limité par un arc de courbe et par ses deux rayons extrêmes.

1. Soit un point A, de cordonnées $x_1 y_1$. Rappelons que l'équation de la droite OA est

$$(1) \qquad x_1 y - y_1 x = 0,$$

et observons que si x_1 est positive et que si, dans le polynome

$$x_1 y - y_1 x,$$

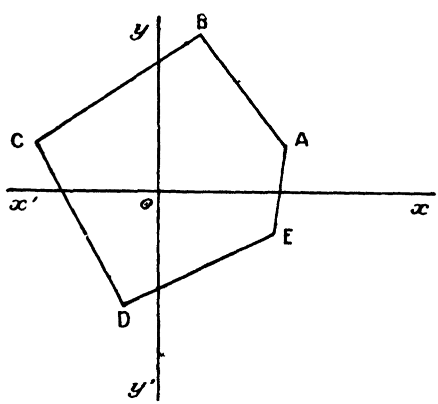
on met à la place des coordonnées courantes les coordonnées d'un point B situé sur la partie positive de l'axe des y, ce polynome devient positif; si, au contraire, x_1 est négative, c'est en mettent à la place des coordonnées courantes les coordonnées d'un point situé sur la partie négative de l'axe des y qu'on rend le polynome positif.

Ces deux résultats peuvent s'énoncer comme il suit :

Ayant divisé le plan, par la droite (1) *en une région positive et une région négative, pour amener le point* A, *par une rotation autour de* O, *dans la région positive, il suffit de le faire tourner, d'un angle moindre que* π, *dans le sens positif de la trigonométrie.*

Soit, d'autre part, un polygone ABCDEF rapporté à deux axes rectangulaires issus d'un point O intérieur au polygone, et soient $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, ... les coordonnées de ses sommets A, B, C, D, ..., dans l'ordre où ils sont rencontrés par un mobile qui se meut sur le

Fig. 1.



contour du polygone dans le sens positif, c'est-à-dire de telle sorte que le rayon vecteur allant du point O au point mobile tourne dans le sens positif. Écrivons l'équation de la droite AB sous la forme

$$(x_1 - x_2)(y_2 - y) - (y_1 - y_2)(x_2 - x) = 0.$$

Si, dans le premier membre de l'équation, on met à la place de x et y, les coordonnées 0, 0 de l'origine, on trouve

$$x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

quantité positive d'après ce qui précède, puisque le point B est dans la région positive par rapport à l'équation de la droite OA, mise sous la forme (1). Si donc, dans ce même polynome, x et y désignent les coordonnées d'un point M intérieur au polygone, et par conséquent situé, par rapport à la droite AB, du même côté que le point O, ce polynome sera positif, et la distance du point M à la droite AB sera positive et égale à

$$\frac{(x_1 - x_2)(y_2 - y) - (y_1 - y_2)(x_2 - x)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}.$$

De même, les distances du point M aux droites BC, CD, ..., EA seront positives, et s'exprimeront comme il suit :

$$\frac{(x_2 - x_3)(y_3 - y) - (y_2 - y_3)(x_3 - x)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{(x_n - x_1)(y_1 - y) - (y_n - y_1)(x_1 - x)}{\sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2}},$$

n désignant le nombre des sommets du polygone.

En multipliant ces expressions, respectivement, par les mesures des distances AB, BC, CD, etc., et faisant la somme des produits, on trouve une fonction linéaire de x et de y. Mais on observe que dans cette fonction le coefficient de x est nul, ainsi que le coefficient de y.

La somme trouvée est donc indépendante de la position du point M, et l'on est conduit au théorème suivant :

La somme des produits des côtés d'un polygone par les longueurs des perpendiculaires à ces côtés, menées par un point intérieur au polygone, est toujours la même, quelle que soit la position de ce point.

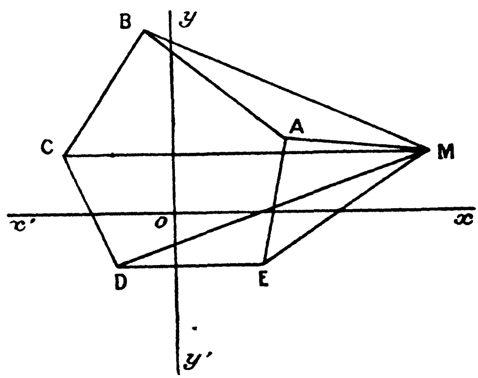
Soit $2S$ cette somme; on peut appeler aire du polygone la grandeur S, et l'on trouve

$$(2) \quad 2S = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + (x_ny_1 - x_1y_n).$$

2. Considérons maintenant un point M, extérieur au polygone; joignons-le à tous les sommets A, B, C, D, E, et parmi les triangles MAB, ACB, ..., ainsi construits, considérons :

1° Ceux qui sont partiellement intérieurs au polygone (tels les triangles MBC, MCD, MDE);

Fig. 2.



2° Ceux qui lui sont totalement extérieurs, tels les triangles MBA, MAE.

Dans la somme analogue à celle qui entre dans l'égalité (2), un triangle de la première catégorie donne lieu à un terme positif; car les points M et O sont du même côté par rapport à la base du triangle. De même, un triangle de la deuxième catégorie donne lieu à un terme négatif, et la somme algébrique des aires de nos triangles s'exprime encore par la formule (2).

D'autre part, cette somme est indépendante de la position des axes de coordonnées par rapport au polygone. Son expression analytique est toujours la même; c'est là un fait dont la vérification analytique ne comporte aucune difficulté.

3. Tout ce qui précède se rattache au procédé d'arpentage, dit *à la planchette*. Mais on emploie aussi d'autres procédés tels que le procédé par la décomposition en trapèzes, consistant à décomposer le polygone en divers polygones plus aisément mesurables, et à faire la somme de leurs aires. La formule (2) va nous montrer que cette somme est toujours la même, quel que soit le procédé employé.

Considérons d'abord, sur une droite AB, les points A, 1, 2, ..., B, dont nous désignons les coor-

Fig 3.

données par $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ..., $x_n y_n$; puis faisons la somme

$$(x_0 y_1 - y_0 x_1) + (x_1 y_2 - y_1 x_2) + \ldots + (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n).$$

Le point x_1, y_1 étant en ligne droite avec les points x_0, y_0, et x_2, y_2, on peut, dans les deux premiers termes de cette somme, remplacer

$$x_1 \quad \text{par} \quad x_0 + \lambda(x_2 - x_0),$$
$$y_1 \quad \text{par} \quad y_0 + \lambda(y_2 - y_0).$$

On trouve ainsi :

$$x_0 y_1 - y_0 x_1 = \lambda(x_0 y_2 - y_0 x_2),$$
$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = (1 - \lambda)(x_0 y_2 - y_0 x_2),$$

puis

$$(x_0 y_1 - y_0 x_1) + (x_1 y_2 - y_1 x_2) = x_0 y_2 - y_0 x_2,$$

ce qui diminue d'une unité le nombre des termes de la somme ci-dessus. Dans la somme transformée, on remplacera les deux premiers termes par un terme unique

$$x_0 y_3 - y_0 x_3,$$

et ainsi de suite. Finalement, la somme entière sera remplacée par

$$x_0 y_n - y_0 x_n.$$

On pourrait dire aussi : Soit δ la distance de l'origine des coordonnées à la droite AB. La somme ci-dessus est égale à

$$\delta(\overline{A1} + \overline{12} + \overline{23} \ldots + \overline{n-1\,B}) = \delta\,\mathrm{AB} = x_0 y_n - y_0 x_n.$$

Nous observerons encore que

$$x_p y_{p+1} = y_p x_{p+1} = -(x_{p+1} y_p - y_{p+1} x_p);$$

de telle sorte que si l'on chemine sur le contour d'un polygone dans un sens déterminé, en faisant correspondre à chacun de ses côtés un terme de la forme

$$x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1},$$

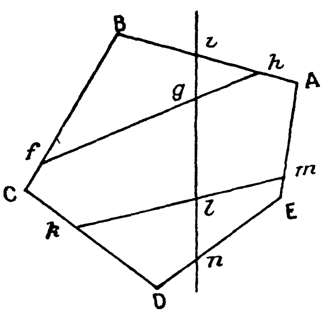
où p et $p+1$ désignent les numéros d'ordre de deux sommets consécutifs, quand on cheminera sur le même côté en sens inverse, on sera conduit à lui faire correspondre un terme opposé au précédent.

4. Soit maintenant un polygone ABCDE, décomposé d'une manière quelconque, en polygones partiels $Bfgi$, igh, ... Faisons la somme de leurs aires, en appliquant à chacun d'eux la formule (2). Soit S cette somme : nous trouverons

$$2S = \sum (x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1}),$$

la somme Σ s'étendant à tous les côtés des polygones partiels, parcourus d'après la loi suivante : 1° En ce

Fig. 4.



qui concerne les côtés appartenant au contour du polygone total, chacun d'eux est parcouru une seule fois dans le sens positif [1] et la somme de tous les termes répondant aux côtés (tels Ah, hi, iB) dans

[1] Nous prenons par exemple pour sens positif le sens de la rotation d'un vecteur issu d'un point fixe à l'intérieur du polygone et dont l'extrémité est au point mobile, le sens de cette rotation étant le sens positif de la trigonométrie; ou bien encore nous supposons qu'un observateur, se déplaçant avec le mobile, aura sans cesse à sa gauche l'aire enveloppée.

lesquels se décompose un des côtés du polygone total, se réduit à un seul terme de la forme

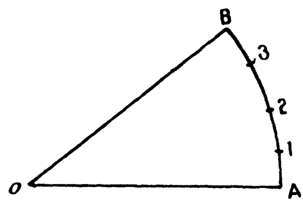
$$x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1},$$

où p et $p = 1$ désignent les numéros d'ordre de deux sommets consécutifs du polygone total (*voir* n° 3).

2° Chacun des côtés des polygones partiels, intérieurs au polygone total (par exemple kl, lg, gf) sera parcouru deux fois en sens inverse et donnera lieu à deux termes égaux et de signe contraire, comme il est dit à la fin du n° 3. Donc on trouvera, finalement, une formule entièrement identique à la formule (2).

5. Ce qui précède conduit naturellement au calcul de l'aire limitée par un segment de courbe OA 12...B. En effet, dans ce segment, inscrivons une ligne polygonale A 123...B, et évaluons, par la formule (2), l'aire

Fig. 5.



du polygone OA 12...B, en supposant l'origine des coordonnées au point O. Nous trouvons

$$2S = \sum x_p y_{p+1} - y_p x_{p+1},$$

en désignant par x_p, y_p, x_{p+1}, y_{p+1} les coordonnées de deux sommets consécutifs de notre ligne polygonale. Écrivons le terme général de cette somme sous la forme

$$x_p(y_{p+1} - y_p) - y_p(x_{p+1} - x_p);$$

Si les deux sommets consécutifs se rapprochent de plus en plus, chaque terme de notre somme est un infiniment petit, et la somme de ces infiniment petits a pour limite l'intégrale

$$\int x\,dy - y\,dx$$

calculée tout le long de l'arc AB. Ce résultat, et ses conséquences, sont choses trop connues pour qu'il soit nécessaire d'y insister plus longuement.