R. BOUVAIST

Sur les droites coupant une conique sous un angle donné

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 41-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__41_0>

[L'1]

SUR LES DROITES COUPANT UNE CONIQUE SOUS UN ANGLE DONNÉ;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je me propose d'exposer ici très succinctement quelques-uns des résultats auxquels conduit l'étude des droites coupant une courbe ou une surface sous un angle donné, me réservant de publier plus tard une étude complète sur ce sujet.

Définitions et notations. — Considérons un cycle (C) orienté dans le sens des aiguilles d'une montre et deux droites non orientées Δ et D.

L'angle $\widehat{\Delta D}$ sera par définition la valeur commune, définie à un multiple de π près, des angles $\widehat{\Delta_1 D_1}$, $\widehat{\Delta_1 D_2}$, $\widehat{\Delta_2 D_1}$, $\widehat{\Delta_2 D_2}$, que font entre elles les semi-droites Δ_1 et D_1, Δ_1 et D_2, Δ_2 et D_1, Δ_2 et D_2, tangentes à (C) et parallèles à Δ et D.

Si angle $\widehat{\Delta D} = V$, D sera la pseudo-perpendiculaire (V) à Δ.

Si Δ est tangente à une conique (E) en M, et si D passe par M, D sera la pseudo-normale (V) en M à (E).

$\overline{OX}$ et OY sont les axes de la conique considérée (E), $\overline{Ox}$ et $\overline{Oy}$ le système de diamètres conjugués de (E), tel que angle $\widehat{\overline{Ox}.\overline{Oy}} = V$; $\overline{Ox'}$, $\overline{Oy'}$ étant le système de diamètres conjugués symétrique du précédent par rapport à $\overline{OX}$ et $\overline{OY}$, on a évidemment

$$\text{angle } \overline{Ox'}.\overline{Oy'} = \pi - V.$$

Nous supposerons $V < \frac{\pi}{2}$.

Théorème. — *Soient* M *un point quelconque du plan*, Δ *sa polaire par rapport à* (E), *la pseudo-perpendiculaire* (V) *à* Δ *issue de* M *rencontre* Ox' *et* Oy *en* α *et* β, *on a* $\frac{M\alpha}{M\beta} = \frac{b'^2}{a'^2}$, a' *et* b' *étant les demi-diamètres de* (E) *dirigé suivant* Ox *et* Oy.

Δ coupe Ox et Oy en A et B, A′M parallèle à Oy coupe Ox en A′, Δ en I, la symétrique $A'\alpha_1$ de Ox par rapport à MA′ coupe $M\alpha\beta$ en α.

Les triangles $MA'\alpha_1$ et IAA′ sont semblables :

$$A'\alpha_1 \times AA' = A'I.A'M = b'^2\left(1 - \frac{\overline{OA'}^2}{a'^2}\right).$$

$\alpha_1 A''$ parallèle à Oy coupe Ox en A″,

$$A'A'' = A'\alpha_1,$$

d'où

$$A'A'' = \frac{b'^2}{OA} \qquad \text{et} \qquad OA.OA'' = a'^2 - b'^2.$$

Si donc M décrit A′M, α_1 est fixe, or si M coïncide avec I′, intersection de Ox' et A′M, $M\alpha\beta$ devient Ox', α et α_1 coïncident.

On a

$$OA'.OA = a'^2,$$

d'où

$$\frac{OA''}{OA'} = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{O\alpha}{OI'}, \qquad \frac{O\alpha}{a'^2 - b'^2} = \frac{OI'}{a'^2} = \frac{\alpha I'}{b'^2};$$

$$\frac{O\alpha}{\alpha I'} = \frac{a'^2 - b'^2}{b'^2} = \frac{\alpha\beta}{M\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{M\alpha}{M\beta} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Conséquences. — Supposons que M décrive une droite D rencontrant (E) en M_1 et M_2, nous pouvons énoncer les propriétés suivantes :

Si un point M *décrit une droite* D, *la pseudo-perpendiculaire* (V) *abaissée de* M *sur sa polaire par rapport à* (E) *enveloppe une parabole* (π_D), *inscrite dans le triangle* Ox', Oy, D.

La parabole (π_D) *touche les pseudo-normales* (V) *à* (E) *aux points* M_1 *et* M_2 *où* D *rencontre* (E), *et la pseudo-perpendiculaire à* D *au milieu* m *de* M_1M_2. *Ces pseudo-normales* $M_1\alpha_1\beta_1$, $M_2\alpha_2\beta_2$, *et la pseudo-perpendiculaire* $m\alpha'\beta'$, *rencontrent* Ox' *en* $\alpha_1\alpha_2\alpha'$, Oy *en* $\beta_1\beta_2\beta'$, α' *et* β' *sont les milieux des segments* $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$.

Les pseudo-normales ($\pi - \nu$) *à* (E) *aux points* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *où les tangentes communes à* (π_D) *et à* (E) *touchent* (E) *concourent au pôle* P *de* D *par rapport à* (E).

La parabole qui touche Ox', Oy, *la tangente* MT *en un point* M *de* (E), *et la pseudo-normale* (V) *à* (E) *en* M, *touche la pseudo-normale au point* γ *où celle-ci touche son enveloppe. Les pseudo-perpendiculaires* (V) *abaissées d'un point quelconque* M' *de* MT, *sur* OM *et sur la polaire de* M' *par rapport à* (E) *interceptent, sur la pseudo-normale* $M\gamma$, *un segment constant et égale à* $M\gamma$.

Problème. — *Déterminer les pseudo-normales* (V) *issues d'un point* P *à une conique à centre* (E).

Les pieds M_1, M_2, M_3, M_4 de ces pseudo-normales sont à l'intersection de (E) avec la conique Γ_P, lieu des points M, tels que les pseudo-perpendiculaires (V) menées de ces points, sur leurs polaires par rapport à (E), passent par P; Γ_P a pour directions asymptotiques Ox' et Oy, passe par O et P si θ désigne l'angle $\overline{OX'}.\overline{OY'}$ des diamètres conjugués égaux de (E), Γ_P est une hyperbole, une parabole, ou une ellipse suivant que V est supérieur, égal ou inférieur à θ. Γ_P reste invariable si (E) varie en restant homothétique et concentrique, elle passe par les pieds des pseudo-perpendiculaires (V) abaissée de P sur les asymptotes OX_1, OY_1 de (E) et a pour centre le milieu ω du segment $u'v'$, u' et v' étant les intersections de OX' et OY' avec les pseudo-perpendiculaires (V) abaissées de P sur OY' et OX'. Ces divers résultats conduisent aux propriétés suivantes, que je me borne à énoncer sans démonstration :

Si d'un point P *d'une ellipse on abaisse, sur les diamètres conjugués égaux* OX' *et* OY', *les pseudo-perpendiculaires* (V) *dont les pieds sont* α *sur* OX', β *sur* OY', *la droite* Pm, *m étant le milieu de* $\alpha\beta$, *est la pseudo-normale* (V) *à l'ellipse en* P.

Si d'un point P *d'une hyperbole on abaisse sur les asymptotes* OX_1, OY_1 *les pseudo-perpendiculaires* (V) *dont les pieds sont* α *sur* OX_1, β *sur* OY_1, *la droite joignant* P *au pôle* φ *de* $\alpha\beta$ *par rapport au cercle* $P\alpha\beta$ *est la pseudo-normale* (V) *à l'hyperbole en* P.

Remarquons que les rayons rectangulaires du faisceau involutif, formé par les directions asymptotiques du faisceau linéaire $(E) + \lambda\Gamma_P = 0$ sont les axes OX et OY de (E). On en conclut facilement que :

Si $P\alpha\alpha'$, *pseudo-perpendiculaire* (V) *à* OX, *rencontre* OX *et* OY *en* α *et* α'; *si* $P\beta\beta'$, *pseudo-perpendiculaire* (V) *à* OY, *rencontre* OY *et* OX *en* β *et* β'; *si* p *est le pôle de* $\alpha'\beta'$ *par rapport à* (E), *si* α_1 *et* β_1 *sont les projections de* p *sur* OX *et* OY, *l'hyperbole* *équilatère ayant pour directions asymptotiques* OX *et* OY, *passant par* α_1 *et* β_1 *et ayant pour centre l'intersection* ω *de* $\alpha\beta$ *et de* Op, *coupe* (E) *aux points* M_1, M_2, M_3, M_4 *qui sont les pieds des pseudo-normales* (V) *menées de* P *à* (E).

Réciproquement : *Si une hyperbole équilatère ayant pour directions asymptotiques les axes* OX *et* OY *de* (E) *coupe* OX *et* OY *en* α_1 *et* β_1, *si les perpendiculaires aux axes en ces points se coupent en* p, *la polaire de* p *par rapport à* (E) *rencontre* OX et OY *en* α' *et* β', *la perpendiculaire à* $\alpha'\beta'$, *issue du centre* ω *de l'hyperbole rencontre* OX *et* OY *en* α *et* β, *les droites* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ *se coupent en un point* P, *où concourent les pseudo-normales* (V), *menées à* (E) *en ses points d'intersection à l'hyperbole équilatère.*

Propositions qui, transformées par polaires réciproques, la conique directrice étant (E), conduisent à la suivante :

Si M_1, M_2, M_3, M_4 *sont les pieds des pseudo-normales* (V) *issues d'un point* P *à une conique* (E), *les tangentes à* (E) *en* M_1, M_2, M_3, M_4, *touchent une conique* (ε) *tangentes aux axes de* (E). *Cette conique* (ε) *demeure invariable, si l'on remplace* (E) *par une conique quelconque homofocale à* (E).

Si par l'un quelconque des sommets de (E) *on mène des parallèles aux tangentes à* (E) *en* M_1, M_2, M_3, M_4, *les quatre points* μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 *où ces parallèles rencontrent à nouveau* (E) *sont sur un même cercle.*

Etant donnée l'une des cordes commmunes M_1, M_2

à (E) et Γ_P, proposons-nous de déterminer la seconde corde commune correspondante $M_3 M_4$:

$M_1 M_2$ rencontre Ox' en α, Oy en β, $M_3 M_4$ rencontre Ox' en α', Oy en β'; l'involution déterminée sur Ox' et Oy par les coniques $(E) + \lambda \Gamma_P = 0$ donne $O\alpha . O\alpha' = -a'^2$, $O\beta . O\beta' = -b'^2$; le pôle μ_{12} de $M_1 M_2$ par rapport à (E) se projette sur Ox' parallèlement à Oy' en α_1 sur Oy parallèlement à Ox en β_1, et l'on a $O\alpha . O\alpha_1 = a'^2$, $O\beta . O\beta_1 = b'^2$. $M_3 M_4$ est donc la symétrique, par rapport à O, de $\alpha_1 \beta_1$. Si M'_4 est la symétrique de M_4 par rapport à O, les droites $M_1 M_2$, $M_3 M'_4$ sont également inclinées sur les axes de (E).

Si P décrit la pseudo-normale (V) à (E) en M_4, les côtés du triangle $M_1 M_2 M_3$ enveloppent une parabole (π_P), tangente à Ox' et Oy et ayant pour foyer le pied f de la pseudo-perpendiculaire (V) abaissée de O sur la tangente à (E) en M'_4. La pseudo-normale (V) à (E) en M'_4 rencontre Ox' en R, Oy en S; le point P' qui se projette en R parallèlement à Oy', en S parallèlement à Ox, est le point de concours des pseudo-normales $(\pi - V)$ à (E), aux points de contact sur (E) des tangentes communes à (E) et (π_P). Les points P et P' sont visiblement isogonaux par rapport au triangle $\mu_{12} \mu_{13} \mu_{23}$, formé par les pôles par rapport à (E) de $M_1 M_2$, $M_1 M_3$, $M_2 M_3$. Donc :

Si M_1, M_2, M_3, M_4 *sont les pieds des pseudo-normales* (V) *menées d'un point* P *à une conique* (E); *si* M'_4 *est le symétrique de* M_4 *par rapport au centre* O *de* (E), *si* f *est le pied de la pseudo-perpendiculaire* (V) *abaissée de* O *sur la tangente à* (E) *en* M'_4, *si la pseudo-normale* (V) *à* (E) *en* M'_4 *coupe* Ox' *en* R, Oy *en* S, *les parallèles à* Oy' *menées par* R, *à* Ox *menée par* S *se coupent en* P', *les points* M_1, M_2, M_3,

f, M'_4, les pieds des pseudo-perpendiculaires (π — V) *abaissées de* P′ *sur les tangentes à* (E) *en* M_1, M_2, M_3 *sont sur un cercle* J_V, *dont le centre* Ω *est sur la perpendiculaire élevée au milieu de* PP′. *Si le point* P *décrit la pseudo-normale* (V) *à* (E) *en* M_4, *les côtés du triangle* $M_1M_2M_3$ *enveloppent une parabole tangente à* Ox' *et* Oy *et ayant pour foyer* f. *Le centre du cercle circonscrit au triangle* $M_1M_2M_3$, *l'orthocentre et le centre de gravité du triangle décrivent des droites.*

On voit du reste que si M_1, M_2, M_3 sont les points d'intersection de (E) avec un cercle variable passant par f et M'_4, les côtés du triangle $M_1M_2M_3$ enveloppent une parabole de foyer f, tangente à Ox' et Oy. Donc :

Si f est le pied de la pseudo-perdendiculaire (V) *abaissée du centre* O *de* (E) *sur la tangente à cette conique en* M'_4, *un cercle variable passant par* M'_4 *et* f, *coupe* (E) *en* M_1, M_2, M_3; *les pseudo-normales* (V) à (E) *en* M_1, M_2, M_3 *concourent en un point* P *de la pseudo-normale* (V) *à* (E) *au point* M_4 *symétrique de* M'_4 *par rapport à* O.

Soit P_1 le point où la pseudo-normale (V) à (E) en M_4 rencontre à nouveau la conique ; f est le pôle de M'_4P_1, par rapport à (E), et les pseudo-normales (V) à (E) aux points d'intersection de la conique et de la polaire de P′ par rapport à (E) se coupent en P. Of et OP′ sont symétriques par rapport à l'axe focal de (E) et l'on a $Of.OP' = c^2$, c étant la demi-distance focale de (E). D'où les propositions suivantes :

Par un point M'_4 *d'une conique* (E) *de centre* O *et par le pied f de la pseudo-perpendiculaire* (V) *abaissée de* O *sur la tangente* M'_4f *à* (E), *on peut* *faire passer quatre cercles qui touchent* (E) *en* W_1, W_2, W_3, W_4. *Ces quatre points* W_1, W_2, W_3, W_4 *sont sur une hyperbole équilatère de centre* M', *ayant pour directions asymptotiques les axes* OX *et* OY *de* (E). *Les pseudo-normales* (π — V) *à* (E) *en* W_1, W_2, W_3, W_4, *concourent au point* P', *tel que* Of *et* OP' *soient symétriques par rapport à l'axe focal de* (E) *et que l'on ait* $Of.OP' = c^2$.

La pseudo-normale (V) *en un point* M_4 *de* (E) *touche son enveloppe en* P_1 *et la coupe en* P_1, P_2, P_3, P_4; *les tangentes à cette enveloppe en* P_1, P_2, P_3, P_4, *sont les pseudo-normales* (V) *à* (E) *en* W_1, W_2, W_3, W_4, *les pseudo-normales* (π — V) *à* (E) *en ces points concourent au point* P'.

Nous allons supposer maintenant que le point P se confonde avec le point M_4 et qu'il décrive la conique (E), des considérations géométriques simples montrent que :

Le cercle J_V *passant par les pieds* M_1, M_2, M_3 *des pseudo-normales* (V) *menées à une conique* (E) *par un point* P *de cette courbe, reste orthogonal à un cercle fixe concentrique à* (E) *et ayant pour rayon* $-(a^2 + b^2)$, *a et b étant les demi-axes de* (E). *Il enveloppe quand* P *varie sur* (E) *une spirique.*

Si μ_{12}, μ_{13}, μ_{23} *sont les pôles des côtés du triangle* $M_1M_2M_3$ *par rapport à* (E), *le cercle* μ_{12}, μ_{13}, μ_{23} *passe par le centre* O *de* (E).

La tangente à (E) *au point* P' *diamétralement opposé à* P *sur* (E) *et les côtés du triangle* μ_{12}, μ_{13}, μ_{23} *sont tangents à une parabole de foyer* O.

Les pseudo-normales (V) *à* (E) *en* M_1, M_2, M_3 *rencontrent* Ox', *en* m_1, m_2, m_3 ; *si par* P *on mène les vecteurs* Pm'_1, Pm'_2, Pm'_3 *équipollents à* m_1M_1,

m_2M_2, m_3M_3, *les points* m'_1, m'_2, m'_3 *sont sur un cercle tangent à* (E) *en* P.

J'arrête ici cette étude, croyant avoir été assez loin pour montrer comment des considérations géométriques simples permettent de généraliser et d'énoncer sous leur véritable forme les propriétés classiques des normales aux coniques. Je n'ai parlé que des coniques à centre, et encore j'ai laissé de côté le cas où l'angle donné V est égal à l'angle des diamètres conjugués égaux de la conique donnée (cas où, comme nous l'avons vu, la conique Γ_P est une parabole), il m'a semblé inutile d'insister davantage, car le principe de continuité de Poncelet montre immédiatement comment il faut modifier nos énoncés, lorsqu'il s'agit de ce cas particulier, où des pseudo-normales (V) sont menées d'un point à une *parabole*.