NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Enveloppe des plans des faces des hexaèdres dont les diagonales sont portées par des droites données

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 380-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__380_1>

[$M^1 2a$]

ENVELOPPE DES PLANS DES FACES DES HEXAÈDRES DONT LES DIAGONALES SONT PORTÉES PAR DES DROITES DONNÉES;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. LEMME. — *Étant données dans l'espace quatre droites* α, β, γ, δ *qui forment deux groupes* (α, γ)

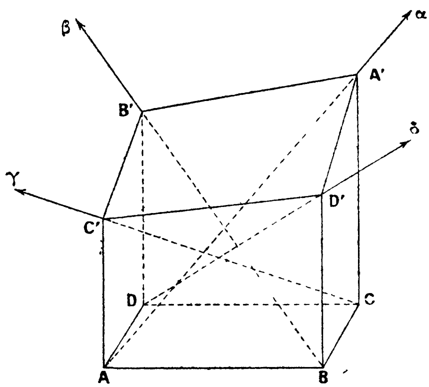
et (β, δ), *si l'on prend sur ces droites quatre points quelconques* A, B, C, D, *on peut se proposer de trouver sur ces mêmes droites quatre points* A′, B′, C′, D′ *tels que les quatre quadrilatères*

$$\text{(1)}\qquad A'C.DB',\quad B'D.AC',\quad C'A.BD'\quad D'B.CA',$$

qui forment une chaîne, soient des quadrilatères plans; ce problème, qui semble bien posé est généralement impossible. Les quatre points A, B, C, D *doivent vérifier, sur les droites* α, β, γ, δ, *une relation qui est quadratique par rapport à chacun d'eux, et le problème a alors une infinité de solutions.* Si l'on se donne les quatre droites, les chaînes de quadrilatères dont il s'agit dépendent de quatre paramètres, comme si le paradoxe n'avait pas lieu, le paramètre perdu pour les points A, B, C, D se retrouvant pour le point A′.

Dans la figure ci-dessous, on doit supposer ici que

Fig. 1.



les deux quadrilatères ABCD et A′B′C′D′, qui ont pour diagonales AC et BD, A′C′ et B′D′, sont des quadrilatères gauches. La méthode de correspondance, appliquée à la recherche du point A' qui réalise les plans (1), montre que le problème est du second degré ; or, on en connaît *a priori* deux solutions qu'il faut rejeter : dans l'une, on met A' en A, C' en C, les deux premiers plans (1) se confondent avec le plan $AC.D$ qui détermine B', les deux derniers plans (1) se confondent avec le plan $AC.B$ qui détermine D' ; dans l'autre, on met B' en B, D' en D ..... — Pour voir que la relation entre les points A, B, C, D est quadratique par rapport à chacun de ces points, on se donne les points B et D, le point A, et l'on cherche C ; *on peut se donner* A', *puisque* C *n'en dépend pas ;* la méthode de correspondance, appliquée à la recherche du point C qui réalise les plans (1), montre que le problème est du second degré.

2. On supposera ici que la figure représente un hexaèdre, et, pour l'énoncé qui suit, *nous échangerons les notations* B *et* B', de sorte que les arêtes issues de D seront DA, DB, DC.

Théorème. — *Les hexaèdres, dont les diagonales* AA', BB', CC', DD' *sont portées par quatre droites données* α, β, γ, δ, *dépendent de deux paramètres ; les plans des faces forment trois séries liées aux trois groupements* $(\delta\alpha, \beta\gamma)$, $(\delta\beta, \gamma\alpha)$, ... *Si* DA, DB, DC *sont trois arêtes, l'enveloppe des plans* $DBA'C$ *et* $D'B'AC'$ (diagonales DA' et BC, $D'A$ et $B'C'$) *est une surface* S_1 *de huitième classe, ayant comme droites doubles les quatre droites données ; les plans* $DCB'A$ *ont de même pour enveloppe une surface* S_2..., *les plans* $DAC'B$ *et* $D'A'CB'$ *ont pour enveloppe une surface* S_3.... — *La correspondance* *entre les plans de deux faces opposées de l'hexaèdre est du quatrième degré par rapport à chacun d'eux.*

Avec les notations de la figure, le plan ABCD dépend de deux paramètres pour que la chaîne de quatre quadrilatères plans du lemme existe, et cette chaîne dépend alors d'un paramètre; on dispose de ce paramètre pour que le quadrilatère A'B'C'D' soit aussi un quadrilatère plan; il reste bien deux paramètres pour l'hexaèdre.

Toujours avec les notations de la figure, les abscisses des points A, B, C, D sur les droites α, β, γ, δ vérifient dans le cas le plus général une relation de la forme

$$\text{A}x^2y^2z^2t^2 - \ldots = 0.$$

Supposons ces points dans un même plan (sans avoir à supposer qu'il en est de même des points A', B', C', D'), et cherchons combien de ces plans passent par une droite donnée Δ, intersection des plans $\text{P} = 0$, $\text{Q} = 0$. Soit $\text{P} + m\text{Q} = 0$ l'équation d'un tel plan. La relation entre x et m est doublement linéaire, de même celle entre y et $m, \ldots$, et l'on doit avoir

$$x = \frac{am - b}{cm + d}, \qquad y = \frac{fm - g}{hm + k}, \qquad \ldots;$$

on a ainsi l'équation en m

$$\text{A}(am - b)^2(fm + g)^2 \ldots + \ldots = 0,$$

qui est du huitième degré.

Si la droite Δ rencontre la droite α en un point A_0, la relation entre x et m prend la forme

$$(x - x_0)(m - m_0) = 0,$$

x_0 correspondant au point A_0, m_0 correspondant au plan (Δ, α); on a alors

$$x = \frac{x_0(m - m_0)}{m - m_0},$$

et il faut, dans l'équation en m, remplacer $am + b$ par $x_0(m - m_0)$, $cm + d$ par $m - m_0$; cette équation prend la forme

$$(m - m_0)^2[Ax_0^2(fm + g)^2\ldots+\ldots] = 0:$$

deux des huit plans se confondent avec le plan (Δ, α). Cela montre que la droite α est une droite double de la surface enveloppe, et l'on s'en rend compte aisément : un plan mené par α coupe les droites β, γ, δ en des points B, C, D; soit A un point de α; en mettant B′ en B, C′ en C, D′ en D, A′ *en un point quelconque de* α, on réalise les quadrilatères plan de l'écriture (1); le plan en question doit être assimilé à un plan tangent à la surface enveloppe.

Par une droite Δ qui remonte deux des quatre droites données, on peut mener quatre plans tangents à chacune des trois surfaces S; ceci permet de voir que la correspondance entre les plans de deux faces opposées de l'hexaèdre est du quatrième degré par rapport à chacun d'eux. Si l'on se donne, avec la notation transformée, le plan DBA′C tangent à la surface S_1, l'arête DC, par exemple, est déterminée; par cette droite, qui rencontre δ et γ, on peut mener à la surface S_2 quatre plans tangents donnant des quadrilatères DCB′A, et chacun de ceux-ci donne un quadrilatère DAC′B, par suite un plan D′B′AC′. *L'étude de la congruence formée par les droites d'intersection* Δ_1 *des plans des faces opposées* DBA′C *et* D′B′AC′ *serait sans doute assez difficile.*

II.

3. Revenons aux conditions du lemme; mais, au lieu de partir des droites α, β, γ, δ, pour considérer les points A, B, C, D qui donnent la chaîne (1) de quadrilatères plans, partons des points A, B, C, D, non supposés coplanaires, et considérons les droites α, β, γ, δ; la relation entre ces droites est celle-ci : *Les plans* (AC, α), (AC, γ) *et* (BD, β), (BD, δ) *doivent être tels que les rapports anharmoniques des deux faisceaux des plans*

$$AC(B, D, \alpha, \gamma,) \quad \text{et} \quad BD(A, C, \beta, \delta)$$

soient inverses.

On peut écrire

$$AC(B, D, \alpha, \gamma) = BD(C, A, \beta, \delta),$$

chacun des deux nombres se déduisant de l'autre par permutation circulaire des lettres.

Les quatre droites AC′, BD′, CA′, DB′ déterminent un quadrilatère gauche MNPQ et l'on est ramené à ceci : *Étant donnés quatre points* A, B, C, D *sur les côtés d'un quadrilatère gauche* MNPQ, *on a*

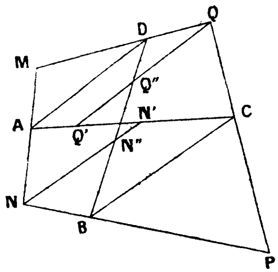
$$(2) \qquad AC(B, D, PQ, MN) = BD(C, A, QM, NP).$$

Évaluons le premier rapport anharmonique sur la droite BD, le second sur la droite AC. Menons pour cela (*fig.* 2) les deux droites QQ′Q″ et NN′N″ rencontrant AC et BD. Les plans ACPQ et ACMN, ou ACQQ′ et ACNN′ rencontrent la droite BD aux points Q″ et N″, et le premier des deux rapports anharmoniques ci-dessus est égal à celui-ci : (B, D, Q″, N″); l'autre est de même égal à celui-ci : (C, A, Q′, N′); or chacun de ces deux rapports anharmoniques est égal à celui des quatre plans

$$QN(BC, DA, Q''Q', N''N').$$

(Ce rapport anharmonique est celui des quatre droites BC, DA, QQ″Q′, NN″N′, génératrices d'un même système d'un hyperboloïde, puisqu'elles rencontrent les trois droites BD, CA et QN.)

Fig. 2.



Autrement : si l'on prend comme tétraèdre de référence le tétraèdre ABCD, les coordonnées des points M, N, P, Q sont de la forme

$$(a, b, c, d), \quad (ma, b, c, d), \quad (ma, mb, c, d), \quad (ma, mb, mc, d),$$

le point Q ramenant au point M par ma, mb, mc, md; les équations des deux faisceaux de plans (2) sont

$$t = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{y}{t} = m\frac{b}{d}, \qquad \frac{y}{t} = \frac{b}{d}$$

et

$$x = 0, \qquad z = 0, \qquad \frac{z}{x} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{1}{m}\frac{c}{a};$$

les deux rapports anharmoniques ont pour valeur $\frac{1}{m}$.

La droite MN, qui passe en A, perce le plan BCD en un point A_1, ...; on a

$$(A, A_1, M, N) = (B, B_1, N, P) = \ldots = \ldots = m;$$

en effet, les quatre premiers points, par exemple, sont dans les plans

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{x}{y} = m\frac{a}{b}.$$

Lorsque A, B, C, D sont dans un même plan, l'énoncé donné plus haut est illusoire; le suivant convient dans tous les cas: *En divisant d'une part le rapport des distances des points* B *et* D *au plan* (AC, α) *par le rapport analogue pour le plan* (AC, γ), *d'autre part le rapport des distances des points* A *et* C *au plan* (BD, β) *par le rapport analogue pour le plan* (BD, δ), *on doit avoir deux quotients inverses.*

III.

4. Étant données quatre droites dans l'espace, on aurait des faits corrélatifs des précédents; on considérerait en particulier des octaèdres dans lesquels les droites d'intersection des plans des faces opposées seraient les droites en question.

IV.

5. Si les quatre droites α, β, γ, δ sont celles qui portent les côtés d'un quadrilatère gauche, en se donnant à volonté les quatre points A, B, C, D, les chaînes de quadrilatères du lemme donné au début dépendent d'un paramètre; en effet, dans les deux plans (α, β) et (γ, δ), on a deux quadrangles ABA′B′ et D′C′DC dont les côtés correspondants doivent se couper sur la droite d'intersection des deux plans : comme cela a lieu pour les côtés AA′ et D′D, BB′ et C′C, il reste quatre conditions qui se réduisent à trois par un fait d'involution, et, après avoir choisi les points A, B, C, D, on peut mener par AB un plan *quelconque* qui donne les points C′ et D′, puis le plan BCD′ qui donne A′, le

plan CDA′ qui donne B′, et le plan DAB′ contient le point C′. — Dans les mêmes conditions, les hexaèdres dont les diagonales sont portées par les quatre droites α, β, γ, δ dépendent de quatre paramètres : trois pour le plan ABCD, un pour le plan ABC′D′; l'existence des trois plans C′D′AB, ABCD, CDA′B assure celle du plan A′B′C′D′.

Ce même système de quatre droites donne lieu à des faits corrélatifs.

V.

6. Le système des quatre droites qui portent les côtés d'un quadrilatère gauche est un cas de dégénérescence de la quartique gauche résultant de l'intersection de deux quartiques. On aurait des faits analogues à ceux du paragraphe IV en substituant une telle courbe au système des quatre droites : la représentation paramétrique au moyen des fonctions elliptiques peut, en effet, se faire de manière que la condition de coplanarité de quatre points de la courbe soit

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0,$$

et, pour le lemme, les quatre conditions relatives aux arguments

$$(a, b, c', d'), \quad (b, c, d', a'), \quad (c, d, a', b'), \quad (d. a, b', c')$$

se réduisent à trois, comme on le voit en additionnant d'une part la première et la troisième, d'autre part la seconde et la quatrième.

Le système des quatre droites qui portent les côtés d'un quadrilatère gauche est aussi bien un cas de dégénérescence de la courbe gauche de quatrième classe dont les plans osculateurs touchent deux quadriques, et une telle courbe donnerait lieu à des faits corrélatifs des précédents.

Il existe, comme on voit, une courbe gauche qui est d'une part l'intersection de deux quadriques, et dont les plans osculateurs sont d'autre part tangents à deux quadriques; son ordre et sa classe sont égaux à 4, son rang est égal à 5. Elle est l'intersection de deux quadriques qui ont en un point un contact d'une nature spéciale, ses plans osculateurs sous les plans tangents communs à deux quadriques ayant également un contact d'une nature spéciale; elle a un point cuspidal et un plan surosculateur. Cayley a montré que les points de la courbe correspondent aux formules

$$\frac{x}{\lambda^4} = \frac{y}{a\lambda^2} = \frac{z}{b\lambda} = \frac{t}{c}$$

(Salmon, *Géométrie analytique à trois dimensions*, t. II, p. 106 de l'édition française); il en résulte que la condition pour quatre points de la courbe d'être dans un même plan se traduit par la relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

Le plan osculateur au point λ a ses coordonnées données par la formule

$$\frac{u}{\frac{1}{\lambda^4}} = \frac{v}{\frac{-6}{a\lambda^2}} = \frac{w}{\frac{8}{b\lambda}} = \frac{r}{\frac{-3}{c}},$$

de sorte que la condition pour quatre plans osculateurs d'avoir un point commun se traduit par la relation

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots = 0.$$

Nous appellerons cette courbe une *quartique gauche de Cayley*. Elle donne lieu à des faits analogues à ceux du paragraphe IV, et à des faits corrélatifs.

7. Salmon a signalé une quartique gauche différente de celle qui est l'intersection de deux quadriques : *la*

quartique gauche de Salmon est l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique ayant en commun deux droites non situées dans un même plan. Cette courbe est unicursale, mais la condition de coplanarité de quatre points ne peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = 0$$

que si la courbe se confond avec une ~~quartique~~ gauche de Cayley.

J'observe d'abord que pour une cubique plane à point double représentée paramétriquement, la condition d'alignement de trois points de la courbe est de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \ldots) + C(\lambda_1 + \ldots) + D = 0;$$

si l'on cherche à la mettre sous la forme

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \text{const.},$$

en posant

$$\lambda = m\frac{\mu - a}{\mu - b},$$

on trouve d'abord

$$Am^3 + 3Bm^2 + 3Cm + D = 0,$$

puis une condition qui, en tenant compte de la précédente, et après suppression du facteur $a - b$, se réduit à

$$Am^2 + 2Bm + C = 0;$$

l'équation du troisième degré en m doit donc avoir une racine double, c'est-à-dire que parmi les droites qui rencontrent la courbe en trois points confondus, avec même valeur de λ, deux sont confondues; le point double doit être pour cela un point de rebroussement. *La courbe est alors de troisième ordre et de troisième classe, elle a un point de rebroussement et une tangente d'inflexion.*

Pour une quartique gauche de Salmon, la condition de coplanarité de quatre points de la courbe est

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + B(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots) \\ + C(\lambda_1\lambda_2 + \ldots) + D(\lambda_1 + \ldots) + E = 0;$$

si l'on cherche à la mettre sous la forme

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \text{const.},$$

en posant

$$\gamma = m\frac{\mu - a}{\mu - b},$$

on trouve d'abord

$$Am^4 + 4Bm^3 + 6Cm^2 + \ldots = 0,$$

puis une condition qui, en tenant compte de la précédente, et après la suppression du facteur $(a-b)^2$, se réduit à

$$Am^3 + 3Bm^2 + 3Cm + D = 0,$$

et enfin une condition qui, en tenant compte des précédentes, et après suppression du facteur $(a-b^2)$, se réduit à

$$Am^2 + 2Bm + C = 0;$$

l'équation du quatrième degré en m doit donc avoir une racine triple. La courbe est alors une quartique gauche de Cayley.