Nouvelles annales de mathématiques

Auric

Sur le rapport anharmonique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 325-329

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__325_0>

[K¹7a]

SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE;

PAR M. AURIC.

Dans ses remarquables *Principes de Géométrie analytique*, Darboux n'a pas hésité à consacrer un Chapitre entier (p. 33 à 51) à l'étude détaillée du rapport anharmonique, voulant montrer par là l'importance du rôle que cette notion fondamentale était appelée à jouer en Mathématiques.

Considérons, avec Darboux, le cas général où α, β, γ, δ sont des quantités quelconques, réelles ou imaginaires, et posons

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} : \frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}.$$

On démontre aisément que, par la permutation des éléments, R peut prendre 24 valeurs, égales entre elles par groupes de quatre : si λ est la valeur commune à un groupe, les autres valeurs de R sont :

$$\frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

On voit également que R est bien déterminé, sauf dans l'hypothèse où trois éléments coïncident.

Les six valeurs de R se réduisent à un nombre moindre dans les cas suivants :

1° Deux éléments coïncident, ce qui donne pour les valeurs de R

$$0, \quad 1, \quad \infty;$$

2° Les éléments forment une relation *harmonique*, auquel cas les valeurs sont

$$-1, \quad \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2;$$

3° Les éléments forment une relation *équianharmonique*, ce qui donne les valeurs

$$-\theta, \quad -\theta^2:$$

θ, θ^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité positive.

Représentons, comme d'habitude, les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$: il est clair qu'on aura

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}},$$

d'où, en faisant ressortir le module et l'argument par la considération des côtés et des angles,

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left| \frac{CA.DB}{DA.CB} \right| e^{i(\widehat{CAD}-\widehat{CBD})}.$$

Examinons d'abord le cas où les éléments forment une relation harmonique : les valeurs de R étant

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2,$$

il en résulte immédiatement que les angles $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$ sont égaux ou supplémentaires ; en d'autres termes, le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Admettons que CAD et CBD soient supplémentaires; on aura

$$\left| \frac{CA.DB}{DA.CB} \right| = 1,$$

ce qui signifie que les produits des côtés opposés sont égaux ; d'où il résulte du théorème de Ptolémée que le quadrilatère est harmonique avec

$$CA.DB = DA.CB = \frac{1}{2}AB.CD.$$

On vérifie facilement que l'on a, dans cette hypothèse,

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = -1, \qquad R(\alpha, \gamma, \beta, \delta) = 2, \qquad R(\alpha\,\gamma, \delta, \beta) = \frac{1}{2}.$$

Si A, B, C sont donnés, on voit que D peut avoir trois positions qui sont les intersections de chacune des trois symédianes de ABC avec le cercle circonscrit à ce triangle.

Il est remarquable que le nom de *quadrilatère harmonique* ait été précisément employé pour désigner le cas où les éléments qu'il représente forment une relation harmonique.

Considérons le cas où les éléments forment une relation équianharmonique; les valeurs correspondantes de R

$$-\theta, \quad -\theta^2$$

ont pour module l'unité et pour arguments $\pm\frac{\pi}{6}$; il en résulte qu'on aura

$$CA.DB = AB.DC = BC.DA.$$

Dans le triangle ABC les distances de D aux sommets sont inversement proportionnelles aux côtés opposés : c'est la définition des deux centres isodynamiques, lesquels sont, comme on sait, inverses l'un de l'autre par rapport au cercle circonscrit à ABC.

On obtient également la relation

$$\widehat{ADB} - \widehat{ACB} = \pm\frac{\pi}{6}$$

qui se ramène à la propriété bien connue : le triangle podaire de D par rapport à ABC est équilatéral.

Lorsque A, B, C sont donnés, il y a deux solutions pour D et l'on devrait appeler *quadrilatères équi-anharmoniques* les figures ainsi obtenues ; si ABC devient un triangle équilatéral, D coïncide avec le centre de gravité, l'autre solution étant rejetée à l'infini.

On connaît la relation vectorielle qui a lieu pour quatre points quelconques du plan

$$\overline{AB}.\overline{DC}+\overline{BC}.\overline{DA}+\overline{CA}.\overline{DB}=0.$$

Si ces quatre points forment un quadrilatère équi-anharmonique, on a en outre la relation vectorielle

$$L=\overline{AB}^2.\overline{DC}^2+\overline{BC}^2.\overline{DA}^2+\overline{CA}^2.\overline{DB}^2=0$$

Appelons, avec Darboux,

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4b'x+a'=0$$

l'équation qui a pour racines α, β, γ, δ.

Posons également

$$M=\delta\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{DA}.\overline{DB}.\overline{DC},$$

$$N=[\overline{CA}.\overline{DB}+\overline{DA}.\overline{CB}][\overline{BA}.\overline{DC}+\overline{CA}.\overline{DB}]$$
$$\times[\overline{DA}.\overline{CB}+\overline{BA}.\overline{BC}].$$

L'identité de Cauchy-Cayley devient

$$N^2+27M^2=\frac{1}{2}L^3$$

et l'on a, à un facteur près,

$$L=aa'-4bb'+3c^2,$$
$$N=aca'+2bcb'-ab'^2-a'b^2-c^3,$$

M représente le discriminant de l'équation et les relations

$$L=0, \qquad N=0,$$

ainsi qu'on l'a vu précédemment, correspondent aux cas où les racines forment entre elles une relation équianharmonique ou harmonique.