

LÉON POMEY

**Démonstration du théorème fondamental
de la théorie des équations algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 321-324

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__321_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[A3a α]

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL
DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES;**

PAR M. LÉON POMEY,

Ingénieur des Manufactures de l'État.

Toute équation algébrique entière $f(z) = 0$ de degré n a n racines.

DÉMONSTRATION. — On sait qu'il existe, dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, une circonférence ayant son centre à l'origine, de rayon fini mais assez grand pour que, à l'intérieur de cette circonférence ou sur elle, $|f(z)|$ soit supérieur à un nombre positif choisi arbitrairement N . Quand z ne sort pas de ce cercle, $|f(z)|$ étant une fonction continue de x et y dans ce domaine borné et complet admet un minimum m ($m < N$) et l'atteint effectivement en un point déterminé a (évidemment intérieur au cercle).

Cela posé, le théorème étant vrai pour le degré 1, il sera démontré d'une manière générale si, le supposant vrai pour le degré $n - 1$, on prouve qu'il l'est encore pour le degré n . *Et il suffit pour cela de démontrer que, dans cette hypothèse, le minimum de $|f(z)|$ est nécessairement nul*: dans ce cas, en effet, $f(z)$ s'annulera pour $z = a$, et en divisant $f(z)$ par $z - a$, on retombera sur une équation de degré $n - 1$.

Or supposons m ou $|f(a)| > 0$. Le quotient de

$f(z) - f(a)$ par $z - a$ étant de degré $n - 1$ a par hypothèse $n - 1$ zéros : a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Donc $f(z) - f(a) = 0$ possède n racines : $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Soient a_p l'une quelconque d'entre elles et λ son ordre de multiplicité. On a

$$f(a_p) = f(a) \text{ et } |f(a_p)| = |f(a)| = m.$$

Il est évident *a priori* qu'on peut (par simple calcul d'identification) déterminer des coefficients c_1, \dots, c_n $|c_\lambda \neq 0$, et c_n étant le coefficient de z_n dans $f(z)$ de façon que

$$(1) \quad f(z) = f(a_p) - c_1(z - a_p)^\lambda - \dots - c_n(z - a_p)^n.$$

Mettons en évidence les parties réelle et imaginaire des divers éléments de (1) en posant :

$$\begin{aligned} f(z) &= P + iQ, \quad a_p = \alpha + i\beta, \quad f(a_p) = f(a) = P_0 + iQ_0, \\ c_\lambda &= A_\lambda + iB_\lambda, \dots, \quad c_n = A_n + iB_n, \\ (z - a_p)^\lambda &= [x - \alpha + i(y - \beta)]^\lambda \\ &= P_\lambda + iQ_\lambda, \dots, (z - a_p)^n = P_n + iQ_n \end{aligned}$$

P et Q sont deux polynomes de degré n en x et y ; $(P_\lambda, Q_\lambda), \dots, (P_n, Q_n)$ des polynomes homogènes de degré λ, \dots, n en $x - \alpha$ et $y - \beta$; enfin $P_0, Q_0, A_\lambda, B_\lambda, \dots, A_n, B_n$ des constantes. Dans ces conditions, (1) devient

$$(2) \quad P + iQ = P_0 + iQ_0 - (A_\lambda + iB_\lambda)(P_\lambda + iQ_\lambda) - \dots - (A_n + iB_n)(P_n + iQ_n).$$

Changeons i en $-i$ et multiplions membre à membre l'égalité ainsi obtenue avec la précédente : il vient

$$(3) \quad P^2 + Q^2 = P_0^2 + Q_0^2 + 2(A_\lambda P_0 + B_\lambda Q_0)P_\lambda + 2(A_\lambda Q_0 - B_\lambda P_0)Q_\lambda + \dots$$

Il est visible que tous les termes non écrits sont de degré plus grand que λ par rapport à $x - \alpha$ et $y - \beta$; d'autre part $A_\lambda P_0 + B_\lambda Q_0$ et $A_\lambda Q_0 - B_\lambda P_0$ ne sont pas nuls ensemble, puisque $A_\lambda^2 + B_\lambda^2$, c'est-à-dire c_λ^2 est différent de zéro, ainsi que $P_0^2 + Q_0^2 = |f(a)|^2$; il résulte de là que, dans le développement de $P^2 + Q^2 - (P_0^2 + Q_0^2)$ ou de $|f(z)|^2 - m^2$, les termes du degré minimum en $x - \alpha$ et $y - \beta$ sont de degré λ (voir Note I).

Faisons varier maintenant z au voisinage de a , mais de façon que $\frac{x - \alpha}{y - \beta}$ conserve une valeur finie arbitraire t ; (3) peut s'écrire alors

$$(4) \quad |f(z)|^2 - m^2 \\ = (y - \beta)^\lambda [D_\lambda + (y - \beta)D_{\lambda+1} + \dots + D_n(y - \beta)^{n-\lambda}],$$

les constantes D_λ, \dots, D_n étant des polynômes en t ($D_\lambda \geq 0$). On peut supposer en outre les modules de $x - \alpha$ et $y - \beta$ suffisamment petits pour que $|f(z)|^2$ reste supérieur à m^2 , et pour qu'en même temps D_λ soit supérieur en module à la somme des termes qui le suivent à l'intérieur du crochet, au second membre de (4); le signe du second membre de (4) est alors celui de $D_\lambda (y - \beta)^\lambda$; il doit rester invariable comme celui du premier membre, même si $y - \beta$ change de signe; il faut donc que λ soit pair.

Ainsi toute racine a_p de $f(z) - f(a) = 0$ est multiple d'ordre pair (voir Note II). Mais cela est manifestement impossible dans le cas où n est impair. Et dans le cas de n pair, la théorie de la division permet d'écrire (en appelant $2\lambda_0, 2\lambda_p, \dots, 2\lambda_h$) les ordres de multiplicité des racines distinctes a, a_p, \dots, a_h

$$f(z) - f(a) = c_n(z - a)^{2\lambda_0}(z - a_p)^{2\lambda_p} \dots (z - a_h)^{2\lambda_h};$$

le second membre est le carré d'un polynôme $g(z)$ de degré $\frac{n}{2}$; d'où

$$(5) \quad \begin{aligned} f(z) &= g^2(z) + f(a) \\ &= [g(z) + i\sqrt{f(a)}][g(z) - i\sqrt{f(a)}]; \end{aligned}$$

$f(z)$ admettrait donc les $\frac{n}{2}$ racines de chacun des deux facteurs ainsi mis en évidence, et le minimum de $|f(z)|$ serait nul, contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, de toutes façons, l'hypothèse faite conduit à une impossibilité. Donc il est bien nécessaire que m soit nul.

C. Q. F. D

Note I. — La présente démonstration du théorème de d'Alembert (dans laquelle il n'est pas fait usage de représentation trigonométrique des imaginaires) perfectionne, en la simplifiant notablement, une autre analyse publiée dans cette Revue en mars 1916. Dans cette dernière, le résultat auquel on vient d'aboutir ci-dessus était obtenu, à la page 103, comme conséquence du fait que $f(z)$ est une fonction synectique, et en utilisant la formule de Taylor pour le développement (1) (alors qu'ici la forme même des c_i n'est pas intervenue, mais seulement la possibilité, évidente *a priori*, d'effectuer ce développement). *C'est à M. Egan (de Dublin) qu'est due la remarque qu'on peut éviter les considérations sur les fonctions synectiques.*

Note. II — Tout ceci s'étend immédiatement à toute fonction analytique $f(z)$. D'où ce théorème : *Si le module d'une fonction analytique $f(z)$ atteint en un point a un minimum $|f(a)|$ non nul, $f(z) - f(a)$ et $|f(z)|^2 - |f(a)|^2$ ont le même ordre au point a , et par suite a est une racine multiple d'ordre pair pour $f(z) - f(a)$.*