NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. LONG

Solution d'un exercice proposé aux candidats à l'agrégation par les « Nouvelles annales de mathématiques »

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 25-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__25_0>

SOLUTION D'UN EXERCICE PROPOSÉ AUX CANDIDATS A L'AGRÉGATION PAR LES « NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES » (1914, P. 322);

PAR M. L. LONG.

---

a, b, c, A, B, C sont six fonctions d'un même paramètre t, dont les dérivées respectives sont a', b', c', A', B', C'. L'équation

$$ax + by + c = \sin(Ax + By + C)$$

représente une famille de courbes (S).

1° *Déterminer les points d'inflexion de la courbe* (S_0) *qui correspond à une valeur particulière t_0 du paramètre t. Quels sont les lieux des points d'inflexion des courbes* (S) *quant t varie?*

Examiner le cas particulier où $\frac{a}{A'} = \frac{b}{B'} = \frac{c}{C'}$.

2° *Soit I_1 l'un des points d'inflexion et soit* (Γ_1) *le lieu de ce point I_1. Sous quelle condition la courbe* (Γ_1) *appartiendra-t-elle à l'enveloppe des courbes* (S), *le point de contact entre l'enveloppe et cette partie de l'enveloppe étant toujours un point d'inflexion I_1 de l'enveloppe* (S)?

3° *Les points d'inflexion de* (S) *étant supposés numérotés dans leur ordre de succession sur* (S), *montrer qu'ils se répartissent en deux groupes : le groupe des points de numéros pairs et le groupe des points de numéros impairs, qui jouissent chacun de la pro-*

priété suivante : si les lieux (Γ_i) *et* (Γ_j) *de deux points d'inflexion d'un même groupe appartiennent à l'enveloppe, il en est de même de tous les points d'inflexion du même groupe. Donner des expressions générales, indépendantes de tout signe de quadrature, des six fonctions* $a, \ldots, C$, *lorsque cette circonstance se produit par un groupe.*

4° *Les conditions précédentes sont supposées remplies : peut-on choisir convenablement les six fonctions pour que le lieu de l'un (ou les lieux de plusieurs) des points d'inflexion de l'autre groupe appartienne (ou appartiennent) aussi à l'enveloppe?*

Plus particulièrement encore, est-il possible de prendre pour les six fonctions a, b, c, A, B, C, *des expressions d'un paramètre t telles que tous les lieux des points d'inflexion de deux groupes étant supposés appartenir à l'enveloppe des courbes correspondantes* (S), *celles-ci soient uniquement constituées par ces différents lieux?*

1° Soit

$$ax + by + c - \sin(Ax + By + C) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe S_0. En appliquant la formule

$$(f'_x)^2 f''_{y^2} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_y)^2 f''_{x^2} = 0$$

qui donne les points d'inflexion, on trouve

$$(aB - bA)^2 \sin(Ax + By + C) = 0. \tag{2}$$

Les points d'inflexion sont donc définis par les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ Ax + By + C &= k\pi \qquad (k \text{ étant un entier}). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

De (3) on tire

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{-Cb + Bc + bk\pi}{Ab - Ba}, \\ y &= \frac{Ca - Ac - ak\pi}{Ab - Ba}. \end{aligned} \right.$$

Quand t varie, le lieu des points d'inflexion des courbes S est représenté paramétriquement par les équations (4).

Si $\frac{a}{A'} = \frac{b}{B'} = \frac{c}{C'}$, la première équation (3) peut être remplacée par la suivante :

$$(3')\qquad A'x + B'y + C'z = 0$$

et dans ce cas le lieu des points d'inflexion, défini par (3′) et la seconde équation (3), est l'enveloppe des droites

$$Ax + By + C = k\pi.$$

2° L'enveloppe des courbes S peut être définie par les deux équations

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} ax + by + c &= \sin(Ax + By + C), \\ a'x + b'y + c' &= (A' + B' + C')\cos(Ax + By + C), \end{aligned} \right.$$

entre lesquelles il suffirait d'éliminer t pour avoir son équation en coordonnées cartésiennes. Or les équations (3) vérifient la première équation (5); la deuxième équation (5) devient, en tenant compte de la deuxième équation (3) et de (4),

$$(6)\quad \begin{aligned} &a'[-Cb + Bc + bk\pi] + b'[Ca - Ac - ak\pi] \\ &\quad + c'(Ab - Ba) = \pm(Ab - Ba)(A' + B' + C'), \end{aligned}$$

le signe + convenant pour les valeurs paires de k et le signe — pour les valeurs impaires. Telle est la condition cherchée.

3° Soient

$$(6')\qquad \begin{aligned} & a[-Cb + Bc + 2b\pi k_1] \\ & + b[\quad Ca - Ac - 2a\pi k_1] + c(Ab - Ba) \\ & = +(Ab - Ba)(A' + B' + C') \end{aligned}$$

et

$$(6'')\qquad \begin{aligned} & a[-Cb + Bc + 2b\pi k_2] \\ & + b[\quad Ca - Ac - 2a\pi k_2] + c(Ab - Ba) \\ & = +(Ab - Ba)(A' + B' - C') \end{aligned}$$

les équations (6) relatives à deux points d'inflexion caractérisés par les coefficients *pairs* $2k_1$, $2k_2$. En retranchant (6″) de (6′), on a

$$2\pi(k_1 - k_2)(a'b - ab') = 0,$$

d'où

$$(7)\qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

et, en intégrant, $a = mb$, m étant une constante. Ajoutons membre à membre (6′) et (6″) : nous obtenons l'équation suivante, en tenant compte de (7) :

$$(8)\qquad c' - c\,\frac{Ab' - Ba'}{Ab - Ba} = A' + B' - C' :$$

sous cette forme, il paraît difficile d'intégrer (8) en faisant disparaître tout signe de quadrature ; mais on peut trouver des expressions générales des six fonctions a, ..., C satisfaisant à (8).

De (7) on tire

$$\frac{a'}{a} = \frac{Ba'}{Ba} = \frac{b'}{b} = \frac{Ab'}{Ab} = \frac{Ab' - Ba'}{Ab - Ba};$$

on peut donc écrire (8) sous la forme suivante :

$$(8')\qquad c' - \frac{ca'}{a} = A' + B' - C'.$$

On voit que si l'on a

$$(\alpha_1) \qquad c = m_1 a \; (m_1 = \text{const.})$$

on peut intégrer (8′), et l'on a ainsi

$$(\beta_1) \qquad c_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C},$$

c_1 étant une constante d'intégration.

On peut obtenir deux autres expressions α_1, β_2 en écrivant (8′) sous la forme

$$c' - \mathrm{A}' - \mathrm{B}' - \mathrm{C}' = c\,\frac{a'}{a};$$

on a alors, en intégrant par partie,

$$c - \mathrm{A} - \mathrm{B} - \mathrm{C} + c_2 = \int c \, d \operatorname{Log} a = c \operatorname{Log} a - \int c' \operatorname{Log} a$$

(c_2 est une constante d'intégration).

Tout signe de quadrature disparaîtra si l'on prend

$$\underline{c \operatorname{Log} a = m_2} \; (m_2 = \text{const.})$$

ou

$$\underline{a^c = \mathrm{M}} \; (\text{où } \mathrm{M} = e^{m_2}).$$

L'expression précédente devient alors

$$\underline{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = m_2(\operatorname{Log} c - 1) + c + c_2.}$$

(8′) peut encore s'écrire

$$d\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{\mathrm{A}' + \mathrm{B}' + \mathrm{C}'}{a}.$$

On peut prendre alors

$$\mathrm{A}' + \mathrm{B}' + \mathrm{C}' = m_3 a' \qquad \text{d'où} \qquad \underline{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = m_3 a + c_3};$$

l'expression précédente donne ensuite, par intégration,

$$\frac{c}{a} = \operatorname{Log} a + c_4.$$

4° Soit

$$(9)\qquad \begin{aligned} & a'[-Cb+Bc+b\pi(2k'+1)] \\ & +b'[\ \ Ca-Ac-a\pi(2k'+1)]+c'(Ab-Ba) \\ & =-(Ab-Ba)(A'+B'+C'); \end{aligned}$$

la condition pour que la courbe $(\Gamma_{k'})$, lieu du point d'inflexion caractérisé par le coefficient impair $2k'+1$, appartienne à l'enveloppe des courbes (S).

En tenant compte de (7), la relation (9) peut s'écrire

$$c(a'B-b'A)+c'(Ab-Ba)=-(Ab-Ba)(A'+B'+C')$$

ou

$$(8_1)\qquad c'-\frac{ca'}{a}=-(A'+B'+C'),$$

relation indépendante de k_1. Ce résultat montre que, si les six fonctions sont telles que le lieu de l'un des points d'inflexion du groupe des coefficients impairs appartienne aussi à l'enveloppe (en même temps que les lieux de tous les points d'inflexion de l'autre groupe), il en est ainsi pour *tous* les points d'inflexion des deux groupes.

On tire de (8′) et de (8_1) les deux relations équivalentes

$$A'+B'+C'=0, \qquad \text{d'où} \qquad A+B+C=\text{const.}$$

et

$$\frac{c'}{c}=\frac{a'}{a}.$$

Les conditions demandées au paragraphe 4° sont donc

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c} \qquad \text{ou} \qquad a=bm=cn, \\ A+B+C=\text{const.} \end{cases}$$

Si les fonctions a, b, c, A, B, C satisfont aux relations (10), les équations (5) qui définissent l'enveloppe des courbes (S) deviennent

$$\begin{aligned} a'x + b'y + C' &= 0, \\ Ax + By + C &= k\pi, \end{aligned}$$

et ces équations sont identiques à celles qui définissent les divers lieux des points d'inflexion des deux groupes. Il suffit donc que les conditions (10) soient satisfaites pour que l'enveloppe des courbes (S) soit uniquement constituée par les divers lieux des points d'inflexion des deux groupes.