

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 230-238

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__230_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

999.

(1870, p. 130 ; 1917, p. 159 .

(L'énoncé de 1917 comporte une erreur de signe :

$$S_m = - (a^m + b^m)$$

et non $a^m + b^m$).

S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_m x^{n-m+1} + \dots + A_n x + A_{n+1} = 0,$$

où l'on fait, pour abrégier,

$$A_m = \frac{a^m - b^m}{a - b},$$

on a, depuis $m = 1$ jusqu'à $m = n$ inclusivement,

$$S_m = -(a^m + b^m).$$

On déduit de là que, a et b étant réels, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles.

S. RÉALIS.

SOLUTION

PAR M. M. FAUCHEUX.

On vérifie facilement la formule pour $m = 1$, et il suffit de démontrer que si la formule est vraie pour toute valeur de m jusqu'à $p < n$, elle est vraie pour $m = p + 1$. On sait que

$$\begin{aligned} A_1 S_{p+1} + A_1 S_p + A_3 S_{p-1} + \dots \\ + A_l S_{p-2-l} + \dots + A_{p+1} S_1 + (p+1) A_{p+2} = 0. \end{aligned}$$

Si la formule est vraie jusqu'à $m = p$,

$$S_{p+1} = \frac{\left\{ (a^2 - b^2)(a^p + b^p) + (a^3 - b^3)(a^{p-1} + b^{p-1}) + \dots \right\} + (a^{p+1} - b^{p+1})(a + b) - (p+1)(a^{p+2} - b^{p+2})}{a - b}$$

Si l'on développe le numérateur, chaque terme de la forme $a^x b^y$ est écrit deux fois avec des signes différents, sauf ceux provenant de $(a^{p+1} - b^{p+1})(a + b)$; toutes réductions faites,

$$S_{p+1} = \frac{b^{p+2} - a^{p+2} - ab^{p+1} - ba^{p+1}}{a - b} = -(a^{p+1} + b^{p+1})$$

et la formule est établie.

Formons l'équation

$$f(x) \equiv r_1 x^{n+2} + r_2 x^{n+1} + \dots + r_{n+2} x + r_{n+3} = 0$$

ayant pour racines a , b et les racines de la proposée. Si l'on

désigne par σ_m les sommes analogues à S_m ,

$$r_1 \sigma_1 + r_2 = 0,$$

$$r_1 \sigma_2 + r_2 \sigma_1 + 2 r_3 = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$r_1 \sigma_n + r_2 \sigma_{n-1} + r_3 \sigma_{n-2} + \dots + r_n \sigma + n r_{n+1} = 0,$$

et comme

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = 0,$$

on a immédiatement

$$r_2 = r_3 = \dots = r_{n+1} = 0$$

et

$$f(x) \equiv r_1 x^{n+2} + r_{n+1} x + r_{n+3}.$$

$f'(x) = 0$ est une équation binôme; si n est pair, elle a une racine réelle; $f(x) = 0$ a deux racines réelles a, b ; la proposée n'a pas de racine réelle.

Si n est impair, $f'(x) = 0$ a deux racines réelles; $f(x) = 0$ en a trois, dont a et b ; la proposée en a seulement une.

1074.

(1872 p. 190; 1917. p. 228.)

Étant donné un polygone plan et convexe dont deux côtés consécutifs quelconques font un angle constant, on sait que le lieu du point, tel qu'en projetant ce point sur les côtés du polygone et joignant les projections consécutives par des droites on forme un polygone d'une aire donnée, est une circonférence. Quand la valeur de l'aire varie, on obtient diverses circonférences qui ont toutes même centre O. Démontrer que ce point O est le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif, ou plus généralement des points qu'on obtient en prenant les centres des deux côtés séparés par un même nombre k de côtés. Ce point O est aussi le centre des moyennes distances de ses projections sur les côtés du polygone.

Voir ce que deviennent ces théorèmes quand ces côtés deviennent infiniment petits et que le polygone se transforme en une courbe plane et convexe. On retrouvera en particulier une proposition bien connue de Steiner rela-

tive au centre de gravité de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux de la courbe et inversement proportionnelles aux rayons de courbure correspondants.

F. DIDON.

SOLUTION

Par M. J. SER.

I. Désignons par φ_h une des m valeurs $\frac{2h\pi}{m}$, où h varie de 0 à $m-1$. Soit D_2 le côté du polygone qui a pour équation cartésienne

$$(1) \quad x \cos \varphi_h + y \sin \varphi_h - p_h = 0.$$

Pour simplifier les calculs, posons

$$(2) \quad x + iy = z, \quad x - iy = t, \quad e^{-i\varphi_h}, \quad e^{i\varphi_h} = \mu_h.$$

Remarquons que les λ et les μ sont des racines différentes d'une même équation $\lambda^m = 1$ et qu'ils sont liés par la relation

$$\lambda_h \mu_h = 1$$

qui entraîne

$$\lambda_h \mu_{h+k} = \mu_k, \quad \lambda_{h+k} \mu_h = \lambda_k.$$

L'équation (1) devient, après transformation,

$$\lambda_h z + \mu_h t - 2y_h = 0.$$

A. La surface du triangle joignant un point $M(zt)$ à ses projections I_h et I_{h+1} sur deux côtés consécutifs du polygone a pour valeur

$$S_h^{h+1} = \frac{1}{8} \sin \frac{2R}{m} (\lambda_h z + \mu_h t - 2p_h) (\lambda_{h+1} z + \mu_{h+1} t - 2p_{h+1}).$$

Le lieu des points M , tels que la somme de ces surfaces ait une valeur constante donnée A , a donc pour équation

$$\sum_{h=0}^{h=m-1} S_h^{h+1} = A.$$

Développons-la en remarquant que

$$\begin{aligned} \Sigma \lambda_h \lambda_{h+1} &= \Sigma \lambda_{2h+1} = 0, & \Sigma \mu_h \mu_{h+1} &= 0, \\ \Sigma \lambda_h \mu_{h+1} + \lambda_{h+1} \mu_h &= m(\lambda + \mu) = 2m \cos \frac{2\pi}{m}, \\ \Sigma \lambda_h p_{h+1} + \lambda_{h+1} p_h &= \Sigma p_h (\lambda_{h+1} + \lambda_{h-1}) \\ &= (\lambda + \mu) \Sigma p_h \lambda_h = 2 \cos \frac{2\pi}{m} \Sigma p_h \lambda_h, \\ \Sigma \mu_h p_{h+1} + \mu_{h+1} p_h &= 2 \cos \frac{2\pi}{m} \Sigma p_h \mu_h, \end{aligned}$$

et en posant

$$\begin{aligned} 2 \Sigma p_h \mu_h &= m z_0, & 2 \Sigma p_h \lambda_h &= m t_0, \\ \sin \frac{2\pi}{m} \Sigma p_h p_{h+1} &= 2 B, \end{aligned}$$

nous obtenons pour le lieu cherché l'équation

$$m \sin \frac{4\pi}{m} (zt - t_0 z - z_0 t) = 8(A - B).$$

C'est bien l'équation d'un cercle ayant pour centre le point fixe $z_0 t_0$.

B. Le point M_h^{h+k} d'intersection de deux côtés D_h, D_{h+k} a pour coordonnées ζ_h

$$\zeta_h = 2 \frac{p_h \mu_{h+k} - p_{h+k} \mu_h}{\lambda_h \mu_{h+k} - \mu_h \lambda_{h+k}} = 2 \frac{p_h \mu_{h+k} - p_{h+k} \mu_h}{\mu_k - \lambda_k},$$

et le centre des moyennes distances de tous ces points est bien le point $O(z_0 t_0)$, puisque

$$\Sigma \zeta_h = 2 \sum \frac{p_h (\mu_{h+k} - \mu_{p-k})}{m (\mu_k - \lambda_k)} = 2 \sum \frac{p_h \mu_h}{m} = z_0.$$

Lorsque $k = 1$, les points M_h^{h+1} sont les sommets du polygone donné.

Pour les autres valeurs de k , les points M_h^{h+k} sont les sommets de divers polygones; l'angle des droites D_h, D_{h+k} est constant quel que soit h , et égal à $\frac{2k\pi}{m}$.

C. Soit P l'origine des coordonnées; le pied P_h de la per-

pendiculaire abaissée de P sur le côté D_h a pour coordonnées

$$\xi_k = \frac{p_h}{\lambda_h} = p_h \mu_k, \quad \eta_k = \frac{p_h}{\mu_h} = p_h \lambda_h.$$

Le centre des moyennes distances de ces points est donc

$$\zeta_0 = \sum \frac{p_h \mu_h}{m} = \frac{z_0}{2}, \quad \eta_0 = \sum \frac{\mu_h \lambda_h}{m} = \frac{t_0}{2}.$$

Ce centre des moyennes distances est donc au milieu de la droite OP et il coïncide avec O lorsque O et P sont confondus.

II. Si le nombre des côtés du polygone grandit indéfiniment, la limite $\frac{2\pi}{m} = \Delta\varphi$ représente l'accroissement constant infiniment petit de l'angle des normales à la courbe C lieu des sommets du polygone donné, c'est-à-dire des points M_h^{h+1} .

Le polygone limite des points M_h^{h+k} et une courbe *isoptique* de la courbe C, de chacun des points de laquelle on voit la courbe C sous l'angle $\alpha = \lim \frac{2k\pi}{m}$.

Le lieu des points P_h relatifs au point O est la podaire de la courbe C par rapport au point O.

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes :

A. Le lieu des points M tels que la podaire de M par rapport à une courbe donnée C ait une aire égale à A est un cercle. Le centre de ce cercle est un point O ayant pour coordonnées cartésiennes

$$x_0 = \frac{z_0 + t_0}{2} = \lim \sum \frac{p_h(\lambda_h + \mu_h)}{m} = \frac{1}{\pi} \int p \cos \varphi d\varphi$$

(p et φ désignant les coordonnées polaires de la projection de l'origine sur une tangente à la courbe C),

$$y_0 = \frac{1}{\pi} \int p \sin \varphi d\varphi.$$

Le rayon a pour carré $\frac{2}{\pi}(A - B)$.

La valeur minimum B que peut prendre A pour que le cercle soit réel est l'aire de la podaire relative au point O.

B. Le point O est le centre des moyennes distances des sommets de trois sortes de polygones dont les sommets sont définis comme correspondant à des valeurs égales de $\Delta\varphi$: 1^o sur la courbe C; 2^o sur une isoptique de cette courbe C; 3^o sur la podaire de la courbe C par rapport au point O.

Soient, dans l'un de ces trois cas, $x' y'$ les coordonnées de l'un des trois sommets : en prenant le point O pour origine, nous aurons les relations

$$O = \lim \sum \frac{x'}{m} = \int x' \Delta\varphi, \quad O = \int y' \Delta\varphi.$$

Soit maintenant $\Delta s'$ le côté du polygone adjacent au point $x' y'$, et soit ρ' la fonction de φ qui représente le rapport $\frac{\Delta s'}{\Delta\varphi}$; on peut écrire

$$\int x' \Delta\varphi = \int \frac{x' \Delta s'}{\rho'} = 0, \quad \int y' \Delta\varphi = \int \frac{y' \Delta s'}{\rho'} = 0,$$

et à la limite

$$\int \frac{x' ds'}{\rho'} = 0, \quad \int \frac{y' ds'}{\rho'} = 0,$$

d'après la propriété bien connue de l'indépendance de la valeur de l'intégrale par rapport à la loi de division.

Le point O est donc le centre de gravité « de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux inscrits, soit dans la courbe, soit dans une de ses isoptiques, soit dans sa podaire, et inversement proportionnelles aux différentes valeurs de ρ' ».

Sur la courbe C, ρ' est égal au rayon de courbure.

Autres solutions, par MM. FAUCHEUX et H. DE MONTILLE.

1486 et 1511.

(1887, p. 160, 496; 1916, p. 394.)

1486. *La probabilité que la conique déterminée par cinq points, pris au hasard dans un plan, soit une ellipse, est infiniment petite.*

1511. On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Démontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole.

CESÀRO.

SOLUTION

Par M. A. PELLET.

Dans la première question, la probabilité est la même que celle d'avoir une valeur négative pour la fonction $y^2 - 4z$, y et z prenant toutes les valeurs possibles, car l'équation de la conique dans le cas où elle peut être une ellipse, s'écrit

$$X^2 + y XY + z Y^2 + \dots = 0,$$

y et z pouvant être absolument quelconques (X, Y coordonnées courantes).

Supposons d'abord y et z inférieurs en valeur absolue au nombre positif R , alors la probabilité est égale au rapport de l'aire comprise dans l'intérieur de la parabole $y^2 - 4z = 0$ (région du foyer) et du cercle $z^2 + y^2 = R^2$, à celle du cercle; ce rapport est inférieur à

$$\frac{3R\sqrt{R}}{\pi R^2} = \frac{3}{\pi\sqrt{R}};$$

il tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini.

Dans la seconde question, l'équation de la conique peut s'écrire

$$AX^2 + BY^2 - 1 = 0,$$

l'une des quantités A ou B étant positive; si la seconde est positive, on a une ellipse; si elle est négative, une hyperbole; mais on voit qu'à tout système de valeurs de A, B donnant une ellipse correspond un système donnant une hyperbole, et *vice versa*.

Autre solution, de 1486, par *Un Anonyme*.

Pour la question 1511, voir une solution précédente, 1918, p. 71, et une observation de M. EGAN, p. 199 (Correspondance).

2365.

(1918, p. 160.)

Dans un triangle ABC la transversale réciproque, par rapport au triangle, de la droite des centres des cercles d'Apollonius, est perpendiculaire à la droite d'Euler.

THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. L. POLI.

On sait que les centres des cercles d'Apollonius sont sur la droite de Lemoine (*cf.*, par exemple, *Exercices de Mécanique*, par F. G. M., p. 707).

La transversale réciproque de la droite de Lemoine est la droite de Longchamps (*Ibid.*, p. 617).

Enfin, cette dernière est perpendiculaire à la droite d'Euler (*cf.*, par exemple, *Ibid.*, p. 692, où l'on démontre que la droite de Longchamps est axe radical du cercle de Longchamps et du cercle circonscrit; or, ces deux derniers cercles ont leurs centres sur la droite d'Euler).