NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur l'orthopôle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 137-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__137_1>

[K'2e]

SUR L'ORTHOPOLE;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Soient

$$\frac{a(1-t_i^2)}{1+t_i^2}, \qquad \frac{2bt_i}{1+t_i^2} \qquad (i=1, 2, 3)$$

les coordonnées de trois points A_1, A_2, A_3 d'une ellipse E. Appelons B_1, B_2, B_3 les milieux des côtés du triangle $A_1A_2A_3$; les coordonnées de B_1 s'écriront

$$a\,\frac{1-t_2^2t_3^2}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)}, \qquad b\,\frac{(t_2+t_3)(1+t_2t_3)}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)}$$

et celles de B_2, B_3 auront des expressions analogues. Soient encore P_a et P_b les orthopôles du grand axe et du petit axe de E par rapport au triangle $B_1B_2B_3$. Le point P_a étant à l'intersection des perpendiculaires à B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 menées par les projections de B_1, B_2, B_3 sur le grand axe de E, ses coordonnées (ξ_a, η_a) s'obtiennent en résolvant le système

$$y = \frac{a(t_2+t_3)}{b(1-t_2t_3)}\left[x - a\,\frac{1-t_2^2t_3^2}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)}\right],$$
$$y = \frac{a(t_3+t_1)}{b(1-t_3t_1)}\left[x - a\,\frac{1-t_3^2t_1^2}{(1+t_3^2)(1+t_1^2)}\right]$$

et s'écrivent par conséquent

$$\xi_a = a\,\frac{(1-t_2t_3)(1-t_3t_1)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)},$$
$$\eta_a = -\frac{a^2}{b}\,\frac{(t_2+t_3)(t_3+t_1)(t_1+t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}.$$

Or les coordonnées ξ_ω, η_ω du centre ω du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ ont pour valeurs

$$\xi_\omega = \frac{c^2}{a}\,\frac{(1-t_2t_3)(1-t_3t_1)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)},$$
$$\eta_\omega = -\frac{c^2}{b}\,\frac{(t_2+t_3)(t_3+t_1)(t_1+t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}.$$

Il s'ensuit que les points P_a et ω sont en ligne droite avec le centre O de l'ellipse E et qu'on a

$$\omega O : \omega P_a = \frac{c^2}{a^2};$$

on a donc aussi, par analogie,

$$\omega O : \omega P_b = -\frac{c^2}{b^2}.$$

On obtient ainsi ce théorème :

Les orthopôles des axes d'une conique circonscrite à un triangle $A_1A_2A_3$, *par rapport au triangle formé par les milieux des côtés, sont en ligne droite avec le cèntre de la conique et le centre du cercle circonscrit au triangle et sont symétriques par rapport au milieu du segment compris entre ces deux centres.*

Le centre du cercle $A_1A_2A_3$ *divise le segment compris entre les deux orthopôles en segments inversement proportionnels aux carrés des axes correspondants.*

Dans le cas de la parabole cette proposition prend la forme suivante :

L'orthopôle de l'axe d'une parabole circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$, *par rapport au triangle des milieux des côtés appartient au diamètre de la parabole passant par le centre du cercle* $A_1A_2A_3$.

Quand la conique considérée est une hyperbole équilatère, les orthopôles P_a et P_b sont confondus au milieu de $O\omega$.

En considérant le cas où la conique est un cercle, on trouve cette propriété facile à établir directement :

Dans un triangle les orthopôles de deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre sont symétriques par rapport à ce point.

2. Le théorème énoncé ci-dessus fournit une solu-

tion du problème qui consiste à déterminer le centre et la nature de la conique définie par trois points A_1, A_2, A_3 et l'un de ses axes Δ. Il suffit de construire l'orthopôle P de Δ par rapport au triangle formé par les milieux des côtés de $A_1A_2A_3$. Le diamètre ωP du cercle $A_1A_2A_3$ passe par le centre cherché O et la conique sera une ellipse si P est extérieur à $O\omega$, une hyperbole si P est intérieur à $O\omega$, une parabole si OP est parallèle à Δ. D'ailleurs si P' désigne le symétrique de P par rapport au milieu de $O\omega$, le rapport $P\omega : \omega P'$ fera connaître le carré du rapport des axes.

De la construction précédente il résulte que, si l'un des axes d'une conique circonscrite à un triangle passe par un point fixe, le centre décrit en général une cubique ; si le point fixe appartient à l'un des côtés du triangle des milieux des côtés, ou est à l'infini, ou appartient au cercle des neuf points, le lieu considéré est une conique. On voit de même que, si le centre d'une conique circonscrite à un triangle décrit un diamètre du cercle circonscrit, ses axes enveloppent la parabole qui est conjuguée au triangle et a ce diamètre pour directrice.