NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. APPELL

Sur une application élémentaire d'une méthode générale donnant les équations du mouvement d'un système

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 121-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__121_0>

[R8e]

SUR UNE APPLICATION ÉLÉMENTAIRE D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DONNANT LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME;

PAR M. P. APPELL.

I. Pour l'enseignement élémentaire de la dynamique, il ne sera peut-être pas sans intérêt de faire connaître une méthode générale qui permet d'écrire les équations du mouvement d'un point à l'aide de dérivations partielles, et cela dans les hypothèses les plus générales. Le point peut en effet être libre, ou assujetti à glisser sans frottement soit sur une courbe, soit sur une surface pouvant dépendre du temps; il peut être soumis à des liaisons qui s'expriment par des relations différentielles non intégrables; le point peut être rapporté à un système quelconque de coordonnées dont la définition dépend du temps; enfin les paramètres employés pour définir le mouvement peuvent être liés aux coordonnées cartésiennes par des relations différentielles non intégrables (1).

II. Rappelons d'abord quelques formules tout à fait élémentaires de la Géométrie analytique de l'espace, en axes rectangulaires.

1° Soient a, b, c les coordonnées d'un point libre P et α, β, γ les coordonnées d'un point fixe Π. Le carré

(1) Voir *Comptes rendus*, t. 129, séance du 6 août 1899, p. 317, et P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II.

de la distance des deux points

$$2R = r^2 = (a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2,$$

a évidemment pour minimum *zéro*; les valeurs de a, b, c donnant le minimum sont fournies par les équations

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial c} = 0.$$

2° Supposons que le point P (a, b, c) ne soit plus libre, mais assujetti à rester sur un plan donné

$$(1) \qquad Aa + Bb + Cc + D = 0.$$

La position du point P rendant la distance ΠP, ou son carré 2R, minimum, s'obtient évidemment en abaissant du point Π la perpendiculaire sur le plan. Les coordonnées a, b, c de cette position sont données par l'équation (1) associée aux trois équations

$$(2) \qquad a-\alpha = \lambda A, \qquad b-\beta = \lambda B, \qquad c-\gamma = \lambda C,$$

où λ est un multiplicateur auxiliaire.

D'ailleurs, la valeur de λ correspondant au minimum est

$$\lambda = -\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

On peut aussi écrire les équations (2)

$$(2') \qquad \frac{\partial R}{\partial a} = \lambda A, \qquad \frac{\partial R}{\partial b} = \lambda B, \qquad \frac{\partial R}{\partial c} = \lambda C.$$

3° Supposons enfin que le point P soit assujetti à rester sur une droite définie par les deux équations

$$(3) \qquad \begin{cases} Aa + Bb + Cc + D = 0 \\ A'a + B'b + C'c + D' = 0 \end{cases}$$

Alors le minimum de la distance ΠP ou de son carré

$2R$ est donné par les valeurs de a, b, c correspondant au point où le plan, mené par Π perpendiculairement à la droite (3), rencontre cette droite. Les coordonnées a, b, c de ce point sont définies par les équations (3) jointes aux trois relations

$$a - \alpha = \lambda A + \mu A',$$
$$b - \beta = \lambda B + \mu B',$$
$$c - \gamma = \lambda C + \mu C',$$

où λ et μ désignent deux multiplicateurs auxiliaires. On peut aussi écrire ces dernières équations

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial R}{\partial a} = \lambda A + \mu A', \qquad \dfrac{\partial R}{\partial b} = \lambda B + \mu B', \\ \dfrac{\partial R}{\partial c} = \lambda C + \mu C'. \end{array} \right.$$

III. Ces formules étant rappelées, imaginons un point matériel de masse m, de coordonnées x, y, z, en mouvement; distinguons les forces qui agissent sur lui en forces directement appliquées dont la résultante a pour projections X, Y, Z, et en forces de liaison s'il y en a. Appelons x', y', z', x'', y'', z'' les dérivées premières et secondes de x, y, z par rapport au temps t. Considérons enfin la quantité

$$R = \frac{m}{2}\left[\left(x'' - \frac{X}{m}\right)^2 + \left(y'' - \frac{Y}{m}\right)^2 + \left(z'' - \frac{Z}{m}\right)^2\right],$$

dont la signification géométrique est simple : si l'on mène à partir de l'origine un vecteur J équipollent à l'accélération et un vecteur $\frac{F}{m}$ équipollent à la force F divisée par la masse, R est, au facteur $\frac{m}{2}$ près, le carré de la distance des extrémités de ces deux vecteurs.

1° Alors, si le point est libre, s'il n'y a aucune liaison, *l'accélération que prend le point à chaque instant est celle qui rend* R *minimum*, c'est-à-dire *nul* dans le cas actuel, car on a,

$$m\vec{J} = \vec{F}.$$

Les équations du mouvement sont donc, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial R}{\partial x''} = 0, \; \frac{\partial R}{\partial y''} = 0, \; \frac{\partial R}{\partial z''} = 0,$$

2° Si le point n'est pas libre, s'il existe des liaisons imposées au point, l'accélération que prend le point, à un instant quelconque t, est, *parmi toutes les accélérations compatibles avec les liaisons*, *celle qui rend* R *minimum*. C'est ce que nous allons montrer, en prenant successivement le cas d'un point assujetti à rester sur une surface donnée ou sur une courbe donnée.

Point sur une surface. — Supposons que les coordonnées x, y, z soient liées par une relation donnée

$$(A) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

pouvant contenir le temps. Géométriquement, cela revient à dire que le point est assujetti à glisser *sans frottement* sur la surface (A) qui peut dépendre du temps. En dérivant deux fois la relation (A) par rapport à t, on a

$$f'_x x' + f'_y y' + f'_z z' + f'_t = 0,$$

$$(\Sigma) \qquad f'_x x'' + f'_y y'' + f'_z z'' + f''_{x^2} x'^2 + \ldots = 0,$$

où les termes non écrits ne renferment pas x'', y'', z''. On peut dire que la liaison imposée au point établit à chaque instant entre x'', y'', z'' la relation (Σ). Dès lors, cherchons les valeurs de x'', y'', z'' qui vérifient la relation linéaire (Σ) et qui rendent R minimum. Nous aurons le problème 2° du n° II, sauf le changement de a, b, c en x'', y'', z'',... Les valeurs cherchées de x'', y'', z'' sont données par

$$\frac{\partial R}{\partial x''} = \lambda f'_x, \ \ldots,$$

ou

$$mx'' - X = \lambda f'_x, \qquad my'' - Y = \lambda f'_y, \qquad mz'' - Z = \lambda f'_z,$$

λ désignant un coefficient arbitraire. Or, les équations ainsi obtenues sont précisément les équations du mouvement, telles qu'on les écrirait en introduisant la réaction normale de la surface (A), réaction qui a pour projections $\lambda f'_x$, $\lambda f'_y$, $\lambda f'_z$.

La valeur de λ correspondant au minimum donne cette réaction en fonction de x, y, z, x', y', z' et t.

Point sur une courbe. = Si x, y, z vérifient deux relations données

$$(C) \qquad f(x, y, z, t) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, t)$$

on obtient entre x'', y'', z'' deux relations

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} f'_x x'' + f'_y y'' + f'_z z'' + f''_{x^2} x'^2 + \ldots = 0. \\ \varphi'_x x'' + \varphi'_y y'' + \varphi'_z z'' + \varphi''_{x^2} x'^2 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Les valeurs de x'', y'', z'', rendant R minimum sous les deux conditions linéaires (Γ), sont alors données par

$$\frac{\partial R}{\partial x''} = \lambda f'_x + \mu \varphi'_x, \ \ldots,$$

ou

$$\begin{aligned} mx'' - X &= \lambda f'_x + \mu \varphi'_x, \\ my'' - Y &= \lambda f'_y + \mu \varphi'_y, \\ mz'' - Z &= \lambda f'_z + \mu \varphi'_z; \end{aligned}$$

on obtient ainsi les équations classiques du mouvement, la réaction normale de la courbe ayant pour projections $\lambda f'_x + \mu\varphi'_x$, ...

Le principe est ainsi démontré. Il va de soi que, dans son énoncé, on peut remplacer R par toute autre expression qui ne diffère de R que par des termes indépendants de x'', y'', z'', par exemple par

$$R = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (Xx'' + Yy'' + Zz'').$$

On a alors

$$R = \frac{1}{2} m J^2 - FJ \cos\widehat{FJ},$$

où le premier terme est l'énergie d'accélération et le second le produit intérieur de la force F par l'accélération J.

IV. Voici maintenant les conséquences pratiques qu'on peut tirer de ce principe, pour écrire les équations du mouvement.

Point libre. — Prenons un système quelconque de coordonnées q_1, q_2, q_3 liées à x, y, z par des relations connues

$$x = g(q_1, q_2, q_3, t),$$
$$y = h(q_1, q_2, q_3, t),$$
$$z = k(q_1, q_2, q_3, t).$$

Pour trouver x, y, z en fonction de t, il suffit de connaître q_1, q_2, q_3 en fonction de t; or, on a

$$x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} q'_3 + \frac{\partial x}{\partial t},$$
$$x'' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q''_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q''_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} q''_3 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q'^2_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

avec des expressions analogues pour y'' et z''.

Formons alors la quantité

$$S = \frac{1}{2} m J^2 = \frac{1}{2} m (x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

en y remplaçant x'', y'', z'' par leurs valeurs; nous aurons pour S une fonction du second degré de q_1', q_2'', q_3'. Formons d'autre part la quantité

$$FJ \cos \widehat{FJ} = Xx'' + Yy'' + Zz'',$$

nous trouverons une expression linéaire en q_1'', q_2'', q_3', de la forme

$$Q_1 q_1'' + Q_2 Q_2'' + Q_3 q_3'' + \ldots$$

où Q_1, Q_2, Q_3 ont les valeurs classiques

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1}, \ldots,$$

de telle façon que $Q_1 \, \delta q_1$ soit le travail de la force F correspondant au déplacement fictif δx, δy, δz obtenu en laissant q_2, q_3, t constants et faisant varier q_1 de δq_1.

Les équations du mouvement s'obtiendront en cherchant les valeurs de q_1'', q_2'', q_3'' qui caractérisent l'accélération, de façon que

$$R = S - (Q_1 q_1'' + Q_2 q_2'' + Q_3 q_3'') + \ldots$$

soit *minimum*. On devra donc écrire

$$\frac{\partial R}{\partial q_1'} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial q_2''} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial q_3''} = 0,$$

ou

$$(4) \quad \frac{\partial S}{\partial q_1''} - Q_1 = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_2''} - Q_2 = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_3''} - Q_3 = 0,$$

Point sur une surface. — Supposons que x, y, z soient liés par une relation donnée

$$(A) \qquad f(x, y, z, t) = 0.$$

On pourra toujours exprimer les coordonnées x, y, z vérifiant cette équation en fonction de deux coordonnées q_1 et q_2 par des formules

$$x = g(q_1, q_2, t), \qquad y = h(q_1, q_2, t), \qquad z = k(q_1, q_2, t),$$

de telle façon que l'élimination de q_1 et q_2 conduit à l'équation (A). Les composantes de l'accélération du point sont alors données par

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q''_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q''_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q'^2_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

Elles dépendent de q''_1 et q''_2 : en donnant à q''_1, q''_2 toutes les valeurs possibles, on aurait toutes les accélérations x'', y'', z'' compatibles avec la condition (A). Dans ce cas, l'énergie d'accélération

$$S = \frac{1}{2} m (x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

devient une fonction du second degré de q''_1, q''_2; puis $Xx'' + Yy'' + Zz''$ devient une fonction linéaire

$$Q_1 q''_1 + Q_2 q''_2 + \ldots$$

de q''_1, q''_2. Les équations du mouvement s'obtiennent en cherchant les valeurs de q''_1 et q''_2 qui rendent R minimum : elles sont

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial q''_2} = 0,$$

ou

$$(5) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_1} - Q_1 = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_2} - Q_2 = 0.$$

Exemple. — *Un plan parfaitement poli passe par un axe horizontal fixe* Ox, *autour duquel il tourne avec une vitesse angulaire constante* ω : *trouver le mouvement d'un point pesant assujetti à glisser sans frottement sur ce plan.*

Soient Oy et Oz deux autres axes perpendiculaires à Ox, Oy horizontal, Oz vertical ascendant. Le plan mobile a pour équation.

$$y \sin \omega t - z \cos \omega t = 0$$

On peut, dans le plan, définir la position d'un point par deux paramètres q_1 et q_2 en posant

$$x = q_1, \qquad y = q_2 \cos \omega t, \qquad z = q_2 \sin \omega t,$$

où q_2 est le rayon vecteur de la projection du mobile sur le plan yOz. Calculant x'', y'', z'', on voit que

$$S = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2 + z''^2) = \frac{m}{2}[q_1''^2 + q_2''^2 - 2\omega^2 q_2 q_2''] + \ldots,$$

les termes non écrits ne contenant ni q_1'' ni q_2''. D'autre part, la seule force donnée étant le poids, on a

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -mg,$$

d'où l'on déduit

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0,$$

$$Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1} = -mg \sin \omega t$$

Les équations du mouvement (5) sont alors

$$q_1'' = 0, \qquad q_2'' - \omega^2 q_2 = -g \sin \omega t,$$

d'où en intégrant

$$q_1 = x = x_0 + x_0' t,$$

$$q_2 = r_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} + C\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t$$

où

$$r_0' = C\omega + \frac{g}{2\omega},$$

x_0 et r_0 désignant les valeurs initiales ($t = 0$) de q_1 et q_2, x_0' et r_0' les valeurs initiales de leurs dérivées.

Point sur une courbe. — Dans ce cas, on peut faire choix d'un paramètre q sur la courbe et exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en posant

$$x = g(q, t), \qquad y = h(q, t), \qquad z = k(q, t),$$

d'où

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial q} q'' + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} q'^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} q' + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad \ldots$$

et pour y'', z'' des expressions analogues.

Pour déterminer les composantes x'', y'', z'', de l'accélération compatibles avec la liaison, il suffit de connaître q''. Portant dans S, on voit qne S devient une fonction du second degré de q''. Puis, portant ces valeurs dans FJ cos $\widehat{\mathrm{FJ}}$, on voit que

$$\mathrm{X} x'' + \mathrm{Y} y'' + \mathrm{Z} z'' \equiv \mathrm{Q} q'' + \ldots,$$

où

$$\mathrm{Q} = \mathrm{X} \frac{\partial x}{\partial q} + \mathrm{Y} \frac{\partial y}{\partial q} + \mathrm{Z} \frac{\partial z}{\partial q},$$

de telle façon que Q δq soit le travail élémentaire de F pour un déplacement fictif δx, δy, δz obtenu en laissant t constant et faisant croître q de δq. L'équation unique du mouvement est alors

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q''} = \mathrm{Q}. \tag{6}$$

Exemple. — *Régulateur à force centrifuge. — Une circonférence de rayon a tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un diamètre vertical fixe Oz; mouvement d'un point pesant glissant sans frottement sur la circonférence.*

Soient O le centre de la circonférence, Oz la verticale descendante, Ox et Oy deux axes horizontaux rectangulaires. Prenons comme paramètre q l'angle du rayon OM, allant au point mobile M, avec Oz. On a

$$x = a \sin q \cos \omega t, \qquad y = a \sin q \sin \omega t, \qquad z = a \cos q$$

d'où, en dérivant deux fois,

$$S = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2 + z''^2) = \frac{m a^2}{2}[q''^2 - 2\omega^2 \sin q \cos q \, q''] + \ldots,$$

les termes non calculés ne contenant pas q''_2. D'autre part,

$$Q = X\frac{\partial x}{\partial q} + Y\frac{\partial y}{\partial q} + Z\frac{\partial z}{\partial q} = - mga \sin q.$$

L'équation du mouvement est donc

$$q'' - \omega^2 \sin q \cos q = -\frac{g}{a}\sin q,$$

facile à intégrer par quadratures. Les positions d'équilibre relatif sont données par les valeurs de q pour lesquelles $q'' = 0$.

V. La forme des équations indiquées ci-dessus s'applique également quand q_1, q_2,... ne sont plus de véritables coordonnées, mais sont liés à x, y, z par des relations différentielles du premier ordre non intégrables, ou encore quand le point x, y, z est assujetti à des liaisons non exprimables en termes finis. C'est ce que je pense exposer dans un autre article.