R. GOORMAGHTIGH

Sur un problème concernant des groupes de points sur l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 445-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__445_1>

[L^1 11 a]

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT DES GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient A_1, B_1, C_1, D_1 quatre points d'une hyperbole équilatère (H) d'équation $xy = 1$; les orthocentres A_2,

B_2, C_2, D_2 des triangles $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ sont quatre nouveaux points de (H); soient de même A_3, B_3, C_3, D_3 les orthocentres des triangles $B_2C_2D_2$, $C_2D_2A_2$, $D_2A_2B_2$, $A_2B_2C_2$, ... et ainsi de suite. M. Appell a donné le problème de chercher (*Nouv. Ann.*, 1918, p. 41) s'il est possible que le groupe $A_nB_nC_nD_n$ coïncide en tout ou en partie avec le groupe initial $A_1B_1C_1D_1$.

Désignons par a_i, b_i, c_i, d_i les abscisses des points A_i, B_i, C_i, D_i. On sait que, lorsque quatre points de (H) forment un groupe orthocentrique, le produit de leurs abscisses est égal à -1; on aura donc

$$a_2 = -\frac{a_1}{a_1b_1c_1d_1}, \qquad b_2 = -\frac{b_1}{a_1b_1c_1d_1}, \qquad \ldots,$$

$$a_3 = a_1^2b_1^2c_1^2d_1^2 \times a_1, \qquad b_3 = a_1^2b_1^2c_1^2d_1^2 \times b_1, \qquad \ldots,$$

$$a_4 = -\frac{a_1}{a_1^7b_1^7c_1^7d_1^7}, \qquad b_4 = -\frac{b_1}{a_1^7b_1^7c_1^7d_1^7}, \qquad \ldots,$$

et, d'une manière générale,

$$a_n = a_1 \times (-1)^{n-1} \times (a_1b_1c_1d_1)^{k_n}, \tag{1}$$

la loi de récurrence entre les k s'écrivant

$$k_n = -3k_{n-1} - 1:$$

on a, par conséquent,

$$k_n = \frac{(-3)^{n-1} - 1}{4}. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) permettent d'étudier complètement la question.

Observons d'abord qu'en raison de la proportionnalité de a_n, b_n, c_n, d_n et a_1, b_1, c_1, d_1, les côtés correspondants de deux quadrilatères $A_nB_nC_nD_n$ et $A_1B_1C_1D_1$ sont parallèles, de sorte que, si A_n coïncide avec A_1, les autres points B_n, C_n, D_n coïncident respectivement avec B_1, C_1, D_1. En tenant compte de cette remarque, on voit que les manières essentiellement distinctes de réaliser la coïncidence complète des deux groupes $A_1 B_1 C_1 D_1$ et $A_n B_n C_n D_n$ sont les suivantes :

$$(3)\qquad A_n \equiv A_1,\quad B_n \equiv B_1,\quad C_n \equiv C_1,\quad D_n \equiv D_1,$$

$$(4)\qquad A_n \equiv C_1,\quad B_n \equiv D_1,\quad C_n \equiv A_1,\quad D_n \equiv B_1,$$

$$A_n \equiv B_1,\quad B_n \equiv C_1,\quad C_n \equiv D_1,\quad D_n \equiv A_1,$$

cette dernière solution n'étant d'ailleurs possible que si les points donnés A_1, B_1, C_1, D_1 sont confondus.

En considérant le cas (3), on a ce premier résultat :

Lorsque le produit ξ des abscisses des points A_1, B_1, C_1, D_1 *sera racine de l'équation*

$$\xi^{\frac{(-3)^{n-1}-1}{4}} = (-1)^{n-1},$$

il y aura coïncidence entre les groupes $A_n B_n C_n D_n$ *et* $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Comme solutions réelles on retrouve d'abord, pour $n = 2$, le cas des groupes orthocentriques. Pour $n = 3$, on a pour le produit $a_1 b_1 c_1 d_1$ les valeurs -1 et $+1$; la première correspond encore au cas des groupes orthocentriques; la seconde donne lieu à la solution dans laquelle chaque groupe $A_i B_i C_i D_i$ est le symétrique du groupe précédent $A_{i-1} B_{i-1} C_{i-1} D_{i-1}$ par rapport au centre de (H).

On voit ensuite que *la coïncidence* (4) *sera réalisée si l'on a*

$$(a_1 b_1)^{\frac{(-3)^{n-1}-1}{2}} = (-1)^n$$

et si l'on prend en outre $c_1 = -a_1$, $d_1 = -b_1$.

Enfin on étudiera de la même façon, au moyen des relations (1), (2), la coïncidence partielle de deux groupes $A_1 B_1 C_1 D_1$ et $A_n B_n C_n D_n$ en considérant les équations qui expriment l'égalité de certaines abscisses a_1, b_1, c_1, d_1 et a_n, b_n, c_n, d_n; rappelons seulement que, d'après une remarque faite plus haut, il sera impossible de réaliser une coïncidence partielle dans laquelle deux points correspondants, A_1 et A_n par exemple, seraient confondus, car alors les autres points correspondants B_1 et B_n, C_1 et C_n, D_1 et D_n coïncident nécessairement.

Remarque. — On peut remarquer que la condition $a_1\, b_1\, c_1\, d_1 = +1$ signifie que les quatre points correspondants sont sur un cercle.