

R. GOORMAGHTIGH

Sur les troisième et quatrième centres de courbure des courbes de Cesàro

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18 (1918), p. 441-445

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__441_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

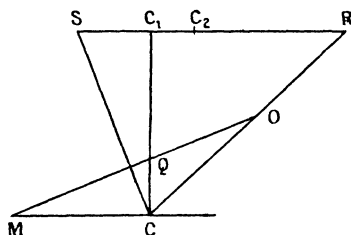
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M'3 i]
 SUR LES TROISIÈME ET QUATRIÈME CENTRES DE COURBURE
 DES COURBES DE CÉSÀRO ;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Soient M un point d'une courbe de Césàro Γ d'indice n , dont le cercle directeur a pour centre O et pour rayon r , et C, C_1, C_2, C_3 les quatre premiers centres de courbure successifs de Γ correspondant au point M . La connaissance des éléments n, O, r entraîne celle des deux premiers centres de courbures C et C_1 .



En effet, si P désigne le point où la polaire de M par rapport au cercle directeur rencontre MC , on a

$$\overline{CP} = n\overline{MC};$$

d'autre part, si l'on appelle Q le point d'intersection du rayon vecteur OM avec CC_1 on a

$$\overline{CC_1} : \overline{CQ} = (1 - n) : (1 + n).$$

Proposons-nous de déterminer le troisième centre de courbure C_2 correspondant au point M de Γ . Prenons comme axes mobiles des x et des y la tangente et la

normale au point C de la développée Γ' et Γ , la direction positive de l'axe des x ayant le sens de la semi-droite MC, celle de l'axe des y ayant le sens de la semi-droite CC_1 . Soient ρ et s le rayon de courbure et l'arc de Γ' en C, l'origine des arcs comptés sur Γ' étant choisie de manière que les coordonnées de M soient $(-s, O)$; désignons encore par α et β les coordonnées variables du pôle fixe O et posons $\lambda = (1 - n) : (1 + n)$. Les équations de OM et C_1C_2 s'écrivent alors

$$(1) \quad \begin{aligned} & \beta x - (\alpha + s)y + \beta s = 0, \\ & f(x, y, s) \equiv (\alpha + s)y - \lambda \beta s = 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées du point C_2 où C_1C_2 touche son enveloppe s'obtiennent en résolvant le système formé par (1) et l'équation

$$(2) \quad (y - \rho) \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} + \rho \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

ou

$$(3) \quad -(\alpha + s)x + \rho \left(\frac{dx}{ds} + 1 \right) y - \lambda \rho s \frac{d\beta}{ds} - \lambda \beta \rho = 0.$$

Or, le point O étant fixe, on a, d'après les formules de Cesàro,

$$(4) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\beta}{\rho} - 1, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{x}{\rho}.$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$(\alpha + s)x - \beta y + \lambda \beta \rho - \lambda \alpha s = 0.$$

En y faisant $y = \rho$, on trouve l'abscisse de C_2 et l'on en déduit facilement la construction suivante :

Si OC et la perpendiculaire abaissée de C sur OM coupent C_1C_2 en R et S, le segment $\overline{RC_2}$ vaut $\frac{2n}{n+1} \overline{SC_1}$.

Le cas des cycloïdales correspond à $n = 0$; on retrouve que le premier et le troisième centres de courbure sont collinéaires avec le pôle.

Pour $n = -2$, on obtient cette construction du troisième centre de courbure en un point M d'une conique de centre O , si l'on suppose construits les deux premiers centres de courbure C et C_1 :

La droite OC et la perpendiculaire abaissée de C sur OM coupent C_1C_2 en R et S ; C_2 est le point obtenu en portant sur $\overline{RC_1}$ le segment $\overline{RC_2}$ égal à $4\overline{SC_1}$.

Remarquons que les considérations qui précèdent sont également applicables au cas limite de la chaînette d'égal résistance; le point O est alors à l'infini et l'on a $\lambda = -1$.

2. La construction générale obtenue plus haut s'applique en particulier aux spirales sinusoides et aux courbes de Ribaucour; rappelons, au sujet de ces courbes, que Cesàro a donné (1) une construction du troisième centre de courbure pour une autre classe générale de courbes qui les comprend également comme cas particuliers; ce sont les courbes définies par l'équation intrinsèque

$$(5) \quad s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{l}{m} \left[\left(\frac{\rho}{a} \right)^{2m} - 1 \right]}}.$$

Pour ces courbes, le troisième centre de courbure C_2 s'obtient de la manière suivante :

Soient L le point qui divise CM dans le rapport

(1) *Natürliche Geometrie*, p. 77.

de l à $1-l$ et K le point qui divise CC_1 dans le rapport de $(m+1)l$ à $1-(m+1)l$; la perpendiculaire élevée en L sur LK passe par le troisième centre de courbure cherché.

3. *Courbes de Cesàro osculatrices.* — Une courbe de Cesàro Γ d'indice donné n oscule une courbe quelconque γ en un point M quand elle a avec celle-ci un contact quintiponctuel en M ; alors les trois premiers centres de courbure de Γ et γ en M coïncident. On a donc cette construction pour le pôle O de la courbe de Cesàro, d'indice donné n , qui oscule une courbe γ en un point M , connaissant les trois premiers centres de courbure de γ en M :

Soient Q le point qui divise CC_1 dans le rapport de $1+n$ à $2n$, S le point où la perpendiculaire abaissée de C sur MQ coupe C_1C_2 , R le point obtenu en prenant $\overline{C_2R}$ égal à $\frac{2n}{n+1} C_1S$; la droite CR coupe MQ au pôle cherché.

En particulier, quand on construit le centre de la conique qui oscule une courbe donnée en M , le segment $\overline{C_2R}$ vaut $\frac{1}{4} \overline{C_1S}$.

4. En dérivant sous la forme (2) l'équation

$$(\alpha + s)x + \mu\beta\rho - \lambda\alpha s = 0 \quad (\mu = \lambda - 1)$$

de la parallèle à CC_1 , menée par C_2 , et en tenant compte des relations (1), on trouve

$$(\alpha + s)(y - \rho) + \beta x - \mu\alpha\rho + \mu\beta\rho \frac{d\rho}{ds} - \lambda\alpha\rho - \lambda\beta s + \lambda\rho s = 0.$$

En remarquant que C_3 a pour abscisse $-\rho \frac{d\rho}{ds}$, on voit que ce point appartient à la droite

$$(\alpha + s)y - (\lambda - 2)\beta x - \rho [(2\lambda + 1)\alpha - (\lambda - 2)s] = 0.$$

On déduit de là cette construction du point C_3 :

Soient a et a' les projections de O sur MC et C_1, C_2 , g, h, k les points qui divisent Oa dans le rapport de $2(1+2n)$ à $1+3n$, aa' dans le rapport de $1+3n$ à $2n$, Ma dans le rapport de $3-n$ à $1+3n$. La parallèle à Mg menée par l'intersection de CC_1 et kh passe par C_3 .

§. *Quatrième centre d'une classe de courbes remarquables.* — La construction précédente s'applique en particulier aux spirales sinusoides et aux courbes de Ribaucour. On obtient une construction plus simple pour le quatrième centre de courbure de ces courbes en les considérant comme cas spéciaux des courbes (5). En dérivant l'équation (5) trois fois par rapport à s , on obtient une relation dont on déduit aisément cette construction du quatrième centre de courbure d'une courbe (5) :

Le centre de courbure cherché appartient à la droite qui joint le point qui divise le premier rayon de courbure dans le rapport de $2(l+m)$ à $2l-1$ à celui qui divise le deuxième rayon de courbure dans le rapport de $(2l-1)$ à $2l$.