NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Au sujet d'un article de M. A. Gérardin

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 43-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__43_0>

[I19a]

AU SUJET D'UN ARTICLE DE M. A. GÉRARDIN;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916, p. 62-74) ont publié un intéressant article sur les *Distances, en nombres entiers, de trois points et de leur centre isogone à* 120° de M. A. GÉRARDIN (Nancy). Il s'agit de la résolution en nombres entiers et positifs des trois équations simultanées :

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+xy+y^2=\square, \\ y^2+yz+z^2=\square, \\ z^2+zx+x^2=\square. \end{cases}$$

Le symbole $\square$ que j'utilise signifie *carré parfait*, selon la notation habituelle des anciens géomètres.

Je crois utile de signaler ici, et très rapidement d'ailleurs, quelques remarques fondamentales sur le système précédent d'équations indéterminées et sur un système beaucoup plus général. Il est manifeste que, sans restriction de généralité, il est possible de remplacer l'hypothèse que les nombres x, y, z sont des entiers par celle de la rationalité de ces nombres. Plus généralement encore, je supposerai qu'on ne fait aucune hypothèse sur les signes de x, y et z.

Dans ces conditions, je considérerai un système de trois équations simultanées quadratiques et homogènes de la forme suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \square, \\ Dy^2 + Eyz + Fz^2 = \square, \\ Gz^2 + Hzx + Ix^2 = \square, \end{cases}$$

où les neuf coefficients A, B, ..., H et I sont des nombres rationnels algébriques quelconques. Chacune des trois équations constitutives d'un tel système n'est autre qu'une équation de Brahmagupta-Fermat,

$$A + Bt + Ct^2 = \square,$$

mise sous forme homogène. Relativement à ce système (2) j'établirai tout d'abord la proposition suivante :

Lorsque chacune des trois équations de Brahmagupta-Fermat constitutives du système (2) *est résoluble* (abstraction faite des deux autres équations), *l'étude du système* (2) *est équivalente à celle, dépendant des fonctions elliptiques, des arithmopoints d'une surface du sixième degré de l'espace ordinaire.*

Je suppose, en effet, que chacune des équations (2) est résoluble; il en résulte que chacune de ces trois équations admet une infinité de solutions; si, pour fixer les idées, l'équation de Brahmagupta-Fermat

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \square$$

admet la solution particulière $(x = x_0, y = y_0)$, sa solution générale en nombres rationnels algébriques est susceptible d'être représentée par l'arithmopoint courant de l'arithmoconique d'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2.$$

Les coordonnées de cet arithmopoint courant s'obtiennent alors comme intersection de cette arithmoconique avec une arithmodroite arbitraire pivotant autour de l'arithmopoint connu *a priori*. Soit

$$y - y_0 = Z(x - x_0)$$

l'équation de cette arithmodroite, Z étant un nombre rationnel algébrique. L'arithmopoint d'intersection autre que le pivot ($x = x_0$, $y = y_0$) a donc pour coordonnées

$$x = \frac{Cx_0Z^2 - 2Cy_0Z - (Ax_0 + By_0)}{CZ^2 + BZ + A},$$

$$y = \frac{-(Bx_0 + Cy_0)Z^2 - 2Ax_0Z + Ay_0}{CZ^2 + BZ + A},$$

de sorte que le rapport $\frac{y}{x}$ qui seul nous intéresse ici a pour expression en fonction de Z :

$$(3) \qquad \frac{y}{x} = \frac{(Bx_0 + Cy_0)Z^2 + 2Ax_0Z - Ay_0}{-Cx_0Z^2 + 2Cy_0Z + Ax_0 + By_0}.$$

A chaque arithmopoint ou solution de l'équation de Brahmagupta-Fermat considérée correspond une valeur du paramètre $Z = \frac{y - y_0}{x - x_0}$; réciproquement, à toute valeur rationnelle de Z correspond ainsi une solution (à un facteur près d'homogénéité) de l'équation de Brahmagupta-Fermat.

Cette remarque faite, si le système (2) est constitué de trois équations de Brahmagupta-Fermat séparément résolubles, la méthode précédente donnera des expressions rationnelles de $\frac{z}{y}$ et de $\frac{x}{z}$ analogues à l'expression (3) : le rapport $\frac{z}{y}$ s'exprimera au moyen d'un paramètre $X = \frac{z - z_1}{y - y_1}$ et le rapport $\frac{x}{z}$ au moyen d'un paramètre $Y = \dfrac{x - x_2}{y - y_2}$ par les formules

$$
(3\ bis)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{z}{y} &= \frac{(E y_1 + F z_1) X^2 + 2 D y_1 X - D z_1}{- F y_1 X^2 + 2 F z_1 X + D y_1 + E z_1}, \\
\frac{x}{z} &= \frac{(H z_2 + I x_2) Y^2 + 2 G z_2 Y - G x_2}{- I z_2 Y^2 + 2 I x_2 Y + G z_2 + H x_2};
\end{aligned}
\right.
$$

(y_1, z_1) est une solution de la seconde équation du système (2); (z_2, x_2) est de même solution particulière de la troisième équation. Il n'est pas nécessaire de supposer qu'il existe des relations spéciales entre x_0, y_0, y_1, z_1, z_2 et x_2.

Il résulte maintenant de tout ce qui précède que l'on peut établir une correspondance entre une solution quelconque (x, y, z) du système (2) et un groupe de valeurs des trois paramètres X, Y, Z, sous la seule condition que le produit des trois rapports $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{y}$ et $\frac{x}{z}$ soit égal à l'unité. Cette condition étant vérifiée, la connaissance de X, Y, Z entraîne celle d'une solution du système (2) à un facteur d'homogénéité près. La proposition énoncée plus haut est donc établie et l'équation de la surface du sixième degré dont l'étude arithmogéométrique est équivalente à l'étude du système des trois équations de Brahmagupta-Fermat est finalement, dans un espace rapporté à trois axes OX, OY, OZ :

$$
\begin{aligned}
&[(B x_0 + C y_0) Z^2 + 2 A x_0 Z - A y_0] \\
&\times [(E y_1 + F z_1) X^2 + 2 D y_1 X - D z_1] \\
&\times [(H z_2 + I x_2) Y^2 + 2 G z_2 Y - G x_2] \\
= \; &[- C x_0 Z^2 + 2 C y_0 Z + A x_0 + B y_0] \\
&\times [- F y_1 X^2 + 2 F z_1 X + D y_1 + E z_1] \\
&\times [- I z_2 Y^2 + 2 I x_2 Y + G z_2 + H x_2]
\end{aligned}
$$

Cette surface du sixième degré est d'une nature bien spéciale, ce qui simplifie heureusement l'étude arithmogéométrique. Les lignes de niveau (l'un quelconque des plans coordonnés étant pris pour plan horizontal) sont des quartiques planes très particulières. Une telle quartique a, en effet, une équation de la forme

$$\alpha X^2 Y^2 + XY(\beta X + \gamma Y) - \varphi_2(X, Y) = 0,$$

$\varphi_2(X, Y)$ étant un polynome quadratique en X et Y. Il est manifeste que cette quartique plane n'est autre que la projection de la biquadratique gauche d'équations

$$XY = Z,$$
$$\alpha Z^2 + Z(\beta X + \gamma Y) - \varphi_2(X, Y) = 0.$$

De cette nouvelle remarque importante il résulte qu'*on se trouve en présence d'une question intimement liée à l'étude arithmogéométrique d'une biquadratique gauche*. Je n'insisterai pas sur cette belle question que j'ai longuement étudiée, sous le point de vue arithmogéométrique, dans les *Notions d'Arithmogéométrie* en cours de publication dans l'*Enseignement mathématique* (¹).

Ainsi donc, dans sa plus grande généralité, le problème étudié par M. A. Gérardin « problème que l'on peut classer parmi les questions ardues d'analyse indéterminée en entiers positifs... » se rattache intimement aux applications géométriques des fonctions elliptiques. Les équations (1) sont manifestement, en effet, des équations individuellement résolubles. L'équation

$$x^2 + xy + y^2 = a^2$$

(¹) Cf. *Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise* (*L'Enseignement Mathématique*, t. XVII, 1915, p. 315-324); *Notions d'Arithmogéométrie* (*Ibid.* t. XVIII, 1916, p. 81-110 à p. 397-428 et à suivre).

admet la solution banale $x = 0$, $y = a$; d'où, en posant

$$y = a + Zx,$$

se déduit la solution générale :

$$x = -\,a\,\frac{2Z+1}{Z^2+Z+1},$$

$$y = \quad a\,\frac{1-Z^2}{Z^2+Z+1}.$$

L'équation de la surface du sixième degré associée s'obtient immédiatement par multiplication membre à membre des équations

$$(Z^2-1)x = (2Z+1)y,$$
$$(X^2-1)y = (2X+1)z,$$
$$(Y^2-1)z = (2Y+1)x,$$

on est ainsi conduit à l'équation relativement simple

$$(X^2-1)(Y^2-1)(Z^2-1) = (2X+1)(2Y+1)(2Z+1).$$

La biquadratique associée a donc pour équations

$$XY = \zeta,$$
$$(\zeta^2 - X^2 - Y^2 + 1)(h^2-1) = (2h+1)\,[4\zeta + 2(X+Y)+1].$$

h est un paramètre rationnel quelconque; X, Y, Z sont les coordonnées cartésiennes dans le système d'axes auxquels est supposé rapporté l'espace qui contient cette biquadratique gauche.

Il n'est peut-être point sans intérêt de rappeler ici un autre remarquable cas particulier des équations du type (2). C'est celui du système des trois équations indéterminées

$$x^2 + y^2 = \square,$$
$$y^2 + z^2 = \square,$$
$$z^2 + x^2 = \square,$$

du problème des *parallélépipèdes rectangles dont les arêtes et les diagonales des faces sont commensurables*. Ce problème a été traité par L. Euler [1] qui en a formé des solutions particulières dépendant de paramètres et qui en a signalé la solution toute particulière

$$x = 44, \qquad y = 240, \qquad z = 117.$$

Ici encore les équations sont manifestement résolubles et l'on doit poser

$$(Z^2 - 1)x = 2Zy,$$
$$(X^2 - 1)y = 2Xz,$$
$$(Y^2 - 1)z = 2Yx:$$

de sorte que cette question est encore réductible à l'étude arithmogéométrique de la surface du sixième degré d'équation

$$(X^2 - 1)(Y^2 - 1)(Z^2 - 1) = 8XYZ;$$

elle se rattache elle aussi à l'étude d'une biquadratique gauche au moyen des fonctions elliptiques.