

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 18 (1918), p. 356-360

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1918\\_4\\_18\\_\\_356\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__356_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

333.

(1856, p. 243; 1916, p. 192.)

*Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés  $m$  et  $p$ , quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?*

SOLUTION

Par M. L. POLI.

Cette question est résolue (p. 362) du volume où elle a été posée, dans un article du *Rédacteur* intitulé *Considérations sur les courbes à double courbure* (1856, p. 359-365).

Mais cet article ne fait par mention de l'énoncé.

1008.

(1870, p. 480; 1917, p. 360.)

*Tout cube parfait, différent de zéro, augmenté de 1, 2 ou 8 unités d'un ordre quelconque, n'est pas un cube parfait.*

MORET-BLANC.

SOLUTION

Par M. L. VARCHON.

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante que nous allons établir :

*La différence entre deux cubes parfaits non nuls admet nécessairement d'autres facteurs premiers que 2 et 5,*

Ce qui revient à dire que l'égalité

$$(1) \quad X^3 - Y^3 - 2^a \times 5^b$$

est impossible pour des nombres entiers. Remarquons d'abord

que, si un nombre est multiple de 5, son cube est évidemment terminé par le même chiffre que ce nombre lui-même. Si maintenant le nombre  $N$  n'est pas multiple de 5, on a

$$N = 5n \pm 1 \quad \text{ou} \quad N = 5n \pm 2$$

et, suivant le cas,

$$N^3 = 5 \times (25n^3 \pm 15n^2 + 3n) \pm 1$$

ou

$$N^3 = 5 \times (25n^3 \pm 30n^2 + 12n \pm 2) \mp 2,$$

les signes supérieurs se correspondant dans les deux cas.

Les parenthèses sont de même parité que  $n$ ; donc les chiffres des unités de  $N$  et  $N^3$  sont les mêmes si  $N = 5n \pm 1$ ; ils ont pour somme 10; si  $N = 5n \pm 2$ , il en résulte donc que, dans tous les cas, si deux nombres sont terminés par le même chiffre (ou, ce qui revient au même, si leur différence est un multiple de 10), il en est de même de leurs cubes et réciproquement.

Ceci étant, supposons que la relation (1) puisse être vérifiée par deux nombres entiers  $X$  et  $Y$ ; soit  $D = 2^{a'} \times 5^{b'}$  le plus grand commun diviseur des nombres  $X$  et  $Y$ , on peut écrire

$$\left(\frac{X}{D}\right)^3 - \left(\frac{Y}{D}\right)^3 = 2^{a-3a'} \times 5^{b-3b'}$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} \frac{X}{D} = x, \quad \frac{Y}{D} = y, \quad a - 3a' = \alpha, \quad b - 3b' = \beta, \\ (2) \quad x^3 - y^3 = 2^\alpha \times 5^\beta; \end{aligned}$$

ce qui montre que, si la relation (1) existe entre deux nombres quelconques,  $X$  et  $Y$ , il existe une relation de même forme entre deux nombres  $x$  et  $y$  premiers entre eux. Il suffit donc de prouver que la relation considérée ne peut pas avoir lieu entre deux nombres premiers entre eux.

La relation (2) peut s'écrire sous les deux formes

$$(3) \quad (x^2 + xy + y^2)(x - y) = 2^\alpha \times 5^\beta,$$

$$(4) \quad [(x - y)^2 + 3xy](x - y) = 2^\alpha \times 5^\beta.$$

$\alpha$  et  $\beta$  ne peuvent être nuls tous les deux, car alors on devrait

avoir

$$\begin{aligned}x - y &= 1, \\(x - y)^2 + 3xy &= 1,\end{aligned}$$

ce qui entraîne  $x = 1$ ,  $y = 0$ , cas que nous avons écarté.

$x$  et  $y$  étant premiers entre eux sont tous deux impairs ou l'un pair et l'autre impair; dans les deux cas le facteur

$$x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy$$

est nécessairement impair; s'il n'a d'autres facteurs premiers que 2 et 5, c'est une puissance de 5.

Considérons maintenant le facteur  $x - y$ : il ne peut être divisible par 5, car alors 5, divisant  $x - y$  et  $(x - y)^2 + 3xy$ , diviserait l'un des nombres  $x$  ou  $y$ , et comme il divise déjà  $x - y$  il diviserait l'autre, ce qui est impossible.

De même,  $x - y$  ne peut être divisible par 2, car le facteur  $x^2 + xy + y^2$  étant divisible par 5,  $x^3 - y^3$  serait divisible par 10, et il en serait de même de  $x - y$  qui serait alors divisible par 5 et nous venons de voir que c'est impossible.

On ne peut donc avoir que  $x - y = 1$ .

Dans ce cas l'équation (4) peut s'écrire

$$(5) \quad 1 + 3y(y + 1) = 5\beta;$$

$y$  et  $y + 1$  ne doivent être ni l'un ni l'autre divisibles par 5.

On devra donc avoir

$$y = 5n + 1 \quad \text{ou} \quad y = 5n + 2 \quad \text{ou enfin} \quad y = 5n + 3,$$

ce qui donnera, pour le premier membre de (5),

$$\begin{aligned}y = 5n + 1, & \quad 3y(y + 1) + 1 = 5n \times (15n + 9) + 7; \\y = 5n + 2, & \quad 3y(y + 1) + 1 = 5n \times (15n + 15) + 19; \\y = 5n + 3, & \quad 3y(y + 1) + 1 = 5n \times (15n + 21) + 37.\end{aligned}$$

On voit immédiatement qu'aucun des seconds nombres n'est divisible par 5 et par suite ne peut vérifier la relation (5).

La relation (1) est donc bien impossible.

Note de M. H. BROCARD, signalant l'analogie des questions 1008 et 902.

1035.

(1871, p. 236; 1917, p. 227.)

*Il y a les mêmes relations entre les tangentes menées d'un point de l'ellipsoïde à trois sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde qu'entre les distances d'un point variable dans le plan à trois points de ce plan.* G. DARBOUX.

## SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient trois sphères

$$\begin{aligned} S_i &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y - 2\gamma_i z + \delta_i \\ &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - P_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \end{aligned}$$

cherchons le lieu des points de l'espace, tels que les puissances de l'un d'entre eux, par rapport à ces trois sphères, soient reliées entre elles par la relation

$$\begin{aligned} &\alpha^2 (d_1^2 - d_2^2) (d_1^2 - d_3^2) + b^2 (d_2^2 - d_1^2) (d_2^2 - d_3^2) \\ &+ c^2 (d_3^2 - d_1^2) (d_3^2 - d_2^2) - a^2 (b^2 + c^2 - a^2) d_1^2 \\ &- b^2 (c^2 + a^2 - b^2) d_2^2 - c^2 (a^2 + b^2 - c^2) d_3^2 + a^2 b^2 c^2 = 0, \end{aligned}$$

qui relie les distances d'un point variable à trois points fixes du plan. Ce sera évidemment la quadrique (E) :

$$\begin{aligned} &\alpha^2 (P_2 - P_1) (P_3 - P_1) + b^2 (P_3 - P_2) (P_1 - P_2) \\ &+ c^2 (P_1 - P_3) (P_2 - P_3) - a^2 (b^2 + c^2 - a^2) S_1 \\ &- b^2 (c^2 + a^2 - b^2) S_2 - c^2 (a^2 + b^2 - c^2) S_3 + a^2 b^2 c^2 = 0, \end{aligned}$$

équation qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &b^2 (P_1 - P_2 - c^2)^2 \\ &+ (b^2 + c^2 - a^2) (P_1 - P_2 - c^2) (P_1 - P_3 - b^2) \\ &+ c^2 (P_1 - P_3 - b^2) \\ &- S_1 [ a^2 (b^2 + c^2 - a^2) \\ &\quad + b^2 (c^2 + a^2 - b^2) + c^2 (a^2 + b^2 - c^2) ] = 0. \end{aligned}$$

(E) est donc bitangente à chacune des sphères  $S_1, S_2, S_3$ ; les sections de (E) par chacune de ces sphères sont du reste

*imaginaires*, ainsi que le montre l'équation précédente et les trois cordes de bicontact sont parallèles.

La proposition à démontrer est d'ailleurs une conséquence de la suivante :

Soit  $S_1$  une sphère bitangente à une ellipsoïde (E) en A et B, les plans d'intersection des deux surfaces étant imaginaires, par un point quelconque M de (E) on mène un plan parallèle à une section circulaire réelle de (E), qui coupe AB en  $\mu$ ,  $\pi_1$  étant la puissance de M par rapport à la sphère  $S_1$ , on a  $\frac{\pi_1}{M\mu_1} = \text{const.}$

Soit en effet

$$S_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2} (x - \alpha)^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2 c^2} (y - \beta)^2 = 0$$

( $a > b > c$ );

nous aurons

$$\overline{M\mu}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 \frac{(a^2 - b^2) c^2}{(b^2 - c^2) a^2},$$

$$\frac{(b^2 - c^2)}{b^2 c^2} \overline{M\mu_1}^2 = (x - \alpha)^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2} + (y - \beta)^2 \frac{b^2 - c^2}{b^2 c^2}.$$

Or

$$\pi_1 = \left[ \frac{(a^2 - c^2)}{a^2 c^2} (x - \alpha)^2 + \frac{(b^2 - c^2)}{b^2 c^2} (y - \beta)^2 \right] c^2,$$

d'où

$$\frac{\pi_1}{M\mu_1} = \text{const.}$$

Soient maintenant trois sphères  $S_1, S_2$  et  $S_3$ ; nous aurons

$$\frac{\pi_1}{M\mu_1} = \frac{\pi_2}{M\mu_2} = \frac{\pi_3}{M\mu_3};$$

or, lorsque M varie sur (E), le triangle  $\mu_1 \mu_2 \mu_3$  reste de forme invariable,  $\sqrt{\pi_1}, \sqrt{\pi_2}, \sqrt{\pi_3}$  sont donc bien reliés par la relation qui relie les distances d'un point variable d'un plan à trois points fixes de ce plan.

