

J.-B. POMEY

**Intégration de l'équation différentielle
linéaire à coefficients constants**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 195-199

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__195_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[H5a]

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE
A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. J.-B. POMEY.

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants et à second membre

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + a_2 y^{(m-2)} + \dots + a_m y = f(x).$$

Je pose

$$F(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m.$$

L'équation

$$F(z) = 0$$

est l'équation caractéristique, dont j'appelle les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Je les suppose inégales.

L'équation différentielle elle-même pourra s'écrire symboliquement, pour abréger,

$$F_y = f(x).$$

J'aurai

$$F'(z)_{z=\alpha_i} = (\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2) \dots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \dots (\alpha_i - \alpha_m).$$

Je pose

$$F'(z)_{z=\alpha_i} = F'(\alpha_i) = \alpha_i^{m-1} + p_1^i \alpha_i^{m-2} + p_2^i \alpha_i^{m-3} + \dots + p_{m-1}^i,$$

ce qui détermine les coefficients p^i . J'écrirai symboliquement, pour abrégé,

$$y_0^{(m-1)} + p_1^i y_0^{(m-2)} + \dots + p_{m-1}^i y_0 = F'_{\alpha_i}(y_0).$$

Enfin, je poserai aussi

$$I_i = \int_0^x e^{-\alpha_i x} f(x) dx$$

et je remarque qu'il y a m intégrales de ce genre.

Cela posé, la solution y qui, pour $x = 0$, se réduit à y_0 en même temps que ses $m - 1$ premières dérivées deviennent égales à $y_0', y_0'', \dots, y_0^{(m-1)}$, est donnée par la formule

$$y = \sum_i e^{\alpha_i x} \frac{I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)}{F'(\alpha_i)}.$$

C'est cette formule que nous proposons.

Pour la vérifier, il suffit de former les dérivées successives; on a ainsi

$$y' = \sum \frac{\alpha_i}{F'(\alpha_i)} e^{\alpha_i x} [I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)] + \sum \frac{1}{F'(\alpha_i)} f(x),$$

.....

$$y^m = \sum \frac{\alpha_i^m}{F'(\alpha_i)} e^{\alpha_i x} [I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)] + f(x) \sum \frac{\alpha_i^{m-1}}{F'(\alpha_i)}$$

$$+ f'(x) \sum \frac{\alpha_i^{m-2}}{F'(\alpha_i)} + \dots + f^{(m-1)}(x) \sum \frac{1}{F'(\alpha_i)}.$$

Or, en vertu des identités d'Euler, toutes ces formules se réduisent; on a, en effet,

$$\sum \frac{1}{F'(\alpha_i)} = 0, \quad \sum \frac{\alpha_i}{F'(\alpha_i)} = 0, \quad \dots,$$

$$\sum \frac{\alpha_i^{m-2}}{F'(\alpha_i)} = 0, \quad \sum \frac{\alpha_i^{m-1}}{F'(\alpha_i)} = 1.$$

Formons F_y , il vient

$$F_y = \sum \frac{F(\alpha_i)}{F'(\alpha_i)} e^{\alpha_i x} [I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)] + f(x)$$

et cette équation se réduit à

$$F_y = f(x),$$

parce que α_i est racine de $F(z)$.

Donc y est solution.

Pour montrer que y et ses dérivées successives se réduisent à $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$, je forme l'expression :

$$y^{(m-1)} + p_1^i y^{(m-2)} + \dots + p_{m-1}^i y$$

d'après les valeurs de ces dérivées simplifiées par les relations d'Euler et j'obtiens :

$$y^{(m-1)} + \dots + p_{m-1}^i y = \sum_j \frac{F'_{\alpha_i}(\alpha_j)}{F'(\alpha_j)} e^{\alpha_j x} [I_j + F'_{\alpha_j}(y_0)].$$

Le second membre est une fonction linéaire des quantités $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$, qui, dans la formule proposée pour notre intégrale, jouent le rôle de constantes arbitraires. Il faut les déterminer, ce qui peut se faire, en donnant à x la valeur zéro dans l'équation précédente et dans les équations du même type, obtenues en donnant à i les valeurs 1, 2, 3, ..., m . Or, si dans l'équation précédente, nous faisons $x = 0$, nous avons $I_j = 0$, $e^{\alpha_j x} = 1$; puis $F'_{\alpha_i}(\alpha_j) = 0$ dès que i est différent de j et, pour $i = j$, nous avons $F'_{\alpha_i}(\alpha_i) = F'(\alpha_i)$. L'équation se réduit donc à la suivante où, dans le premier membre, les quantités $y_0, \dots, y_0^{(m-1)}$ sont les valeurs de y et de ses $m - 1$ premières dérivées pour $x = 0$, savoir

$$y_0^{(m-1)} + p_1^i y_0^{(m-2)} + \dots + p_{m-1}^i y_0 = F'_{\alpha_i}(y_0),$$

ce qui est une identité. Donc les inconnues $y_0, y'_0, \dots,$

$y_0^{(m-1)}$ qui figurent dans les seconds membres doivent bien avoir les valeurs qu'on leur a données; les constantes arbitraires $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$ sont bien égales aux valeurs de y et de ses $(m-1)$ premières dérivées pour $x = 0$.

Il est d'ailleurs facile de voir que le déterminant des équations qui déterminent les valeurs à donner aux constantes arbitraires est différent de zéro, de telle sorte qu'il n'y a pas d'autre solution possible pour les valeurs à leur attribuer que celle qui a été indiquée. Si, en effet, il y avait une relation linéaire identique entre les $F'_{\alpha_i}(y_0)$, comme ce serait le cas si le déterminant s'annulait, on aurait

$$\sum A_i F'_{\alpha_i}(y_0) = 0.$$

Or je dis que toutes les quantités A_1, A_2, \dots, A_m sont nulles.

Pour prouver, par exemple, que l'on a $A_i = 0$, il suffit de poser

$$y_0 = 1, \quad y'_0 = \alpha_i, \quad y''_0 = \alpha_i^2, \quad y_0^{(m-1)} = \alpha_i^{m-1}.$$

On a alors, en général,

$$F_{\alpha_j}(\alpha_i) = 0$$

si j est différent de i ; mais comme les racines sont simples, on a

$$F'(\alpha_i) \neq 0,$$

d'où

$$\sum_j A_j F'_{\alpha_j}(\alpha_i) = A_i F'(\alpha_i) = 0$$

et, par suite : $A_i = 0$.

Il est donc prouvé que le déterminant n'est pas nul.

Les traités de calcul différentiel indiquent bien que l'intégration de l'équation différentielle linéaire à

second membre se ramène aux quadratures, quand on sait intégrer l'équation sans second membre, mais je n'ai pas vu la solution explicite que je viens de donner dans le cas de l'équation à coefficients constants. Je trouve qu'il y a une certaine analogie entre la formule que je propose et la formule d'interpolation de Lagrange.