

F. BALITRAND

Note sur les cubiques circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 175-186

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__175_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M¹5k α]

NOTE SUR LES CUBIQUES CIRCULAIRES;

PAR M. F. BALITRAND.

I. M. Gomes Teixeira (*Nouv. Ann.*, 1916, p. 449) a indiqué un mode de construction des cubiques circulaires, en faisant remarquer que ceux que l'on connaît déjà sont peu nombreux. Mais il existe pour les cubiques générales des procédés de génération

classiques qui, convenablement particularisés, doivent s'appliquer aux cubiques circulaires. C'est ce que nous nous proposons de démontrer pour le procédé bien connu dû à Mac-Laurin.

Soient ABCD un quadrilatère quelconque, E, F, G ses points diagonaux, P un point de son plan. Les points de contact des tangentes menées de P aux coniques du faisceau ABCD sont sur une cubique, et réciproquement toute cubique peut être engendrée de cette façon. Il suffit de choisir pour P un point quelconque de la courbe et pour A, B, C, D les points de contact des tangentes issues de P.

La cubique passe en A, B, C, D et les tangentes en ces points sont les droites PA, PB, PC, PD. Elle passe aussi en E, F, G et les tangentes en ces points se coupent en un point Q, situé sur la cubique et qui est le point de concours des polaires de P par rapport aux coniques du faisceau. De plus, la tangente EQ, par exemple, est conjuguée harmonique de EP, par rapport aux côtés du quadrilatère qui se croisent en E; de même pour FQ et GQ. La cubique passe aussi en P; la tangente correspondante étant PQ. Enfin P et Q sont situés sur la conique lieu des pôles de la droite PQ par rapport aux coniques du faisceau ABCD; car ce sont les points de contact de cette droite avec les deux coniques du faisceau qui la touchent.

Ce mode de génération des cubiques générales, dû à Mac-Laurin comme nous l'avons dit, peut être présenté sous une forme un peu différente. On peut remarquer en effet que les points de contact des tangentes issues de P, avec les coniques du faisceau, sont les points doubles de l'involution déterminée, sur les transversales issues de P, par les coniques du faisceau; ou, si l'on veut, par les côtés et les diagonales du qua-

drilatère ABCD. On sait que ces points doubles peuvent se construire avec la règle et le compas et, par suite, en particulierisant convenablement les données, on obtiendra avec les mêmes instruments une construction des cubiques circulaires.

Il suffit pour cela de supposer que les points A, B, C, D forment un groupe orthocentrique et que le point P est rejeté à l'infini dans une direction quelconque; c'est-à-dire que les tangentes sont menées parallèlement à une direction fixe. Dans ce cas, en effet, les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères qui déterminent sur la droite de l'infini une involution dont les points doubles sont les points cycliques. La cubique passant par ces points est dès lors circulaire.

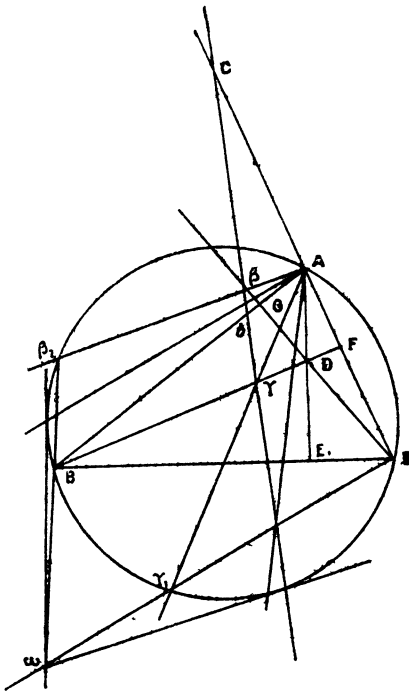
Nous voyons ainsi que les points A, B, C, D sont les points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote réelle et que E, F, G sont les pieds des hauteurs du triangle ABC. En ces derniers points les tangentes sont symétriques de la direction fixe par rapport aux hauteurs correspondantes. Elles concourent en Q qui est le point d'intersection à distance finie de la courbe avec son asymptote réelle. Ce point est situé sur le cercle des neuf points de ABC.

Réciproquement, toute cubique circulaire peut être engendrée de cette façon. Il suffit de choisir, comme points de base du faisceau de coniques, les points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote réelle et, comme point d'émission des tangentes, le point réel situé à l'infini sur la courbe. Il en résulte comme conséquence immédiate que : *dans toute cubique circulaire, les points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote réelle forment un groupe orthocentrique.*

Pour obtenir les points de la cubique, on aura donc à trouver les points doubles des involutions déterminées sur les droites parallèles à la direction fixe par les côtés et les hauteurs du triangle ABC ; ce qui peut se faire par la construction suivante :

On donne un triangle ABC et une direction fixe quelconque. Parallèlement à cette direction, on mène une droite qui rencontre les côtés AB et AC en

Fig. 1.



b et c et les hauteurs correspondantes en γ et β . Les droites $A\gamma$ et $A\beta$ coupent le cercle circonscrit à ABC

en γ_1 et β_1 ; soit ω le point de concours de $B\beta_1$ et $C\gamma_1$. Les droites qui joignent le sommet A aux points de contact des tangentes, issues de ω , au cercle circonscrit, coupent la parallèle à la direction fixe en deux points qui décrivent, quand celle-ci se déplace parallèlement à elle-même, une cubique circulaire (fig. 1).

II. Le calcul permet d'arriver aux mêmes résultats. Prenons des coordonnées trilineaires et choisissons le triangle EFG pour triangle de référence. Les hyperboles équilatères circonscrites à ABC sont conjuguées par rapport à EFG . Leur équation est donc de la forme

$$(1) \quad fx^2 + gy^2 + hz^2 = 0$$

avec la condition

$$(2) \quad f + g + h = 0,$$

qui exprime qu'elles passent en D , orthocentre de ABC et centre du cercle inscrit à EFG .

La tangente à une hyperbole au point x, y, z a pour équation

$$(3) \quad fxX + gyY + hzZ = 0.$$

Si l'on écrit qu'elle est parallèle à la droite fixe

$$(4) \quad lX + mY + nZ = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle rencontre cette droite sur la droite de l'infini

$$aX + bY + cZ = 0,$$

on trouve la relation

$$(5) \quad f(cm - bn)x + g(an - cl)y + h(bl - am)z = 0.$$

Par l'élimination de f , g et h entre (1), (2) et (5), on arrive à l'équation du lieu cherché qui peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma x^2 [(an - cl)y - (bl - am)z] &= 0, \\ \Sigma yz [(bl - am)y - (an - cl)z] &= 0, \\ (ax + by + cz)(lyz + mzx + nxy) \\ - (lx + my + nz)(ayz + bzx + cxy) &= 0. \end{aligned}$$

Au moyen de ces différentes formes d'équations, on vérifie aisément les propriétés énoncées plus haut. On voit notamment que les tangentes en E, F, G concourent au point

$$(cm - bn)x = (an - cl)y = (bl - am)z,$$

qui est le quatrième point commun au cercle EFG et à la conique

$$lyz + mzx + nxy = 0.$$

On voit aussi que l'équation de la cubique s'obtient par l'élimination du paramètre λ entre les deux équations

$$\begin{aligned} ayz + bzx + cxy - \lambda(lyz + mzx + nxy) &= 0, \\ ax + by + cz - \lambda(lx + my + nz) &= 0. \end{aligned}$$

La droite de l'infini et la droite

$$lx + my + nz = 0$$

sont les transformées isogonales du cercle EFG et de la conique ci-dessus. Il en résulte un nouveau mode de génération des cubiques circulaires.

III. Nous allons maintenant démontrer quelques propriétés de ces courbes en nous servant des coordonnées cartésiennes. Dans ce système de coordonnées,

leur équation générale est

$$(ax + \beta y)(x^2 + y^2) + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Prenons pour origine le point Q où l'asymptote réelle coupe la courbe, et pour axe des x la tangente en ce point. L'équation précédente prend la forme

$$(ax + \beta y)(x^2 + y^2) + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0.$$

Il reste à exprimer que l'asymptote réelle passe à l'origine, ce qui fournit pour h la valeur suivante :

$$h = \frac{bx^2 + a\beta^2}{2x\beta}.$$

En la portant dans l'équation ci-dessus, on obtient pour l'équation définitive des cubiques circulaires

$$(ax + \beta y)\left(x^2 + y^2 + \frac{a}{x}x + \frac{b}{\beta}y\right) + 2fy = 0.$$

Nous poserons

$$P = ax + \beta y, \quad C = x^2 + y^2 + \frac{a}{x}x + \frac{b}{\beta}y;$$

de sorte que l'équation s'écrive

$$P.C + 2fy = 0$$

et résulte de l'élimination du paramètre variable λ entre les deux équations

$$C + 2\lambda fy = 0, \quad P - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Il s'ensuit un mode de génération, au moyen d'un faisceau de cercles et d'un faisceau de droites parallèles qui se correspondent homographiquement, analogue à celui qui est donné par M. G. Loria dans ses *Spezielle ebene Curven* (t. I, p. 33).

Pour abréger un peu le langage, nous appellerons le cercle $C = o$ *cercle focal* et le point Q *point principal* (voir G. LORIA, *loc. cit.*); T sera le tangentiel de Q .

Le cercle focal ne rencontre la cubique qu'en deux points à distance finie, savoir le point principal et son tangentiel. Les autres points de rencontre étant rejetés à l'infini, le cercle est bitangent à la cubique aux points cycliques. Par suite, son centre est le foyer singulier de la courbe; de sorte qu'en désignant par x_0, y_0 les coordonnées de celui-ci, on a

$$x_0 = -\frac{a}{2\alpha}, \quad y_0 = -\frac{b}{2\beta}.$$

Proposons-nous de déterminer les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote. Nous trouvons d'abord qu'ils sont situés sur la courbe

$$(\alpha x + \beta y) [\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0)] - f\alpha = 0,$$

c'est-à-dire sur une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes l'asymptote réelle de la cubique et la perpendiculaire abaissée du foyer singulier sur celle-ci.

En combinant son équation avec celle de la cubique, nous obtenons

$$\alpha(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y) + 2\gamma[\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0)] = 0$$

ou bien

$$\alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy - 2x_0(\alpha x + \beta y) = 0,$$

qui représente une autre hyperbole équilatère. Celle-ci passe à l'origine où elle est tangente à l'asymptote réelle de la cubique; elle passe aussi en T et par les points d'intersection du cercle focal et de son diamètre perpendiculaire à l'asymptote réelle. Son centre est au milieu de QT .

La première de ces hyperboles peut encore être définie comme le lieu des milieux des cordes de la cubique parallèles à l'asymptote réelle. En effet, si ξ et η sont les coordonnées d'un point du lieu et

$$x = \xi + \beta\rho, \quad y = \eta - \alpha\rho$$

les équations d'une corde, l'équation qui donne les valeurs de ρ correspondant aux points d'intersection est

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha\xi + \beta\eta)\rho^2 \\ & + 2(\alpha\xi + \beta\eta)[\beta(\xi - x_0) - \alpha(\eta - y_0) - f\alpha]\rho \\ & + (\alpha\xi + \beta\eta)(\xi^2 + \eta^2 - 2x_0\xi - 2y_0\eta) + 2f\eta = 0; \end{aligned}$$

et l'on voit que la somme des racines est nulle si le point est sur l'hyperbole précitée. En résumé :

Les points de contact des tangentes à la cubique parallèles à l'asymptote réelle sont les points d'intersection de deux hyperboles équilatères.

La première a pour asymptotes l'asymptote réelle de la cubique et la perpendiculaire abaissée du foyer singulier sur celle-ci. Elle est le lieu des milieux des cordes de la cubique parallèles à l'asymptote réelle.

La seconde passe par le point principal, où elle touche l'asymptote réelle, et son tangentiel. Son centre est au milieu du segment qui joint ces points. Elle passe en outre par les points d'intersection du cercle focal et de son diamètre perpendiculaire à l'asymptote réelle.

Si l'on pose

$$\frac{\alpha}{\beta} = -m, \quad \frac{f}{\beta} = -K^2,$$

l'équation de la cubique s'écrit

$$(y - mx)(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y) - 2K^2y = 0.$$

La droite

$$y = mx + \lambda,$$

parallèle à l'asymptote réelle, la coupe en deux points à distance finie qui sont situés sur le cercle

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2\left(y_0 + \frac{K^2}{\lambda}\right)y = 0.$$

Ce cercle coupe l'axe Oy en un point R tel que

$$QR = 2\left(y_0 + \frac{K^2}{\lambda}\right),$$

tandis que le cercle focal le coupe en un point U tel que $QU = 2y_0$. Donc

$$RU = \frac{2K^2}{\lambda} \quad \text{ou bien} \quad \lambda = \frac{2K^2}{RU}.$$

Par suite, en portant à partir de l'origine une longueur égale à $\frac{2K^2}{RU}$, on obtient l'ordonnée à l'origine de la droite et il en résulte pour les cubiques circulaires le mode de génération suivant :

Soit TQU un triangle rectangle en Q. Par les sommets T et Q on fait passer un cercle variable qui coupe l'autre côté en R. On porte à partir de Q, suivant QU, une longueur QS = $\frac{2K^2}{RQ}$, K étant un paramètre constant, et par le point ainsi obtenu on mène une parallèle à une direction fixe. Ses points d'intersection avec le cercle variable décrivent une cubique circulaire.

Réciproquement, toute cubique circulaire peut être engendrée par ce procédé.

En passant maintenant des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, l'équation des cubiques prend la forme

$$\rho^2(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega) - 2\rho(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)(x_0 \cos \omega + y_0 \sin \omega) + 2f \sin \omega = 0.$$

Une transversale issue de l'origine rencontre la courbe en deux points, autres que l'origine, et le rayon vecteur du milieu du segment qui les joint est égal à

$$x = x_0 \cos \omega + y_0 \sin \omega.$$

Le lieu de ce point milieu est donc le cercle

$$x^2 + y^2 - x_0 x - y_0 y = 0,$$

c'est-à-dire le cercle décrit sur le segment qui joint le point principal au foyer singulier comme diamètre. On a donc ce théorème :

Si, autour du point principal, on fait pivoter une transversale qui rencontre la cubique en deux points, autres que l'origine, le lieu du milieu de ces deux points est le cercle décrit sur le segment qui joint le point principal et le foyer singulier comme diamètre.

Cette proposition est connue, au moins sous une autre forme (voir G. LORIA, *loc. cit.*). On peut la compléter de la façon suivante :

Le cercle décrit sur le segment qui joint le point principal et le foyer comme diamètre passe par les points de contact des tangentes à la cubique issues du point principal.

Après ce qui précède, cela est à peu près évident géométriquement.

Voici comment on peut le démontrer par le calcul.

La première polaire de l'origine par rapport à la cubique a pour équation

$$(\alpha x + \beta y)(x_0 x + y_0 y) - 2fy = 0.$$

Par une combinaison avec l'équation de la courbe, on obtient

$$x^2 + y^2 - x_0 x - y_0 y = 0,$$

c'est-à-dire l'équation du cercle précédent.

L'équation polaire de la cubique donne encore, en désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons vecteurs de ses points d'intersection avec une transversale issue de l'origine,

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{2f \sin \omega}{\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega}.$$

Par suite, si l'on porte sur la transversale une longueur égale à la moyenne géométrique de ρ_1 et ρ_2 , on obtient une courbe qui a pour équation

$$(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) - 2fy = 0.$$

C'est une cubique circulaire qui présente la particularité suivante : l'origine est à la fois centre, point d'inflexion et foyer singulier de la courbe.