

MATHIEU WEILL

**Sur quelques équations homogènes
indéterminées du troisième degré**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 41-59

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__41_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[I 19c]

**SUR QUELQUES ÉQUATIONS HOMOGÈNES INDÉTERMINÉES
DU TROISIÈME DEGRÉ ;**

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. Soit à résoudre, en nombres entiers, positifs ou négatifs, l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3.$$

Une solution bien connue est

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 4, \quad z_1 = 5, \quad t_1 = 6.$$

Une seconde solution sera

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0, \quad t_2 = 1.$$

Partant des formules

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \\ t &= t_1 + \lambda(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

on trouve pour λ une équation du troisième degré qui admet les solutions évidentes $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = \frac{9}{8}$, qui donne pour x , y , z , t les valeurs $\frac{-6}{8}$, $\frac{-4}{8}$, $\frac{-5}{8}$ et $\frac{-3}{8}$, on retombe ainsi sur la première solution ; mais si l'on prend la solution

$$x_3 = -4, \quad y_3 = -5, \quad z_3 = 6, \quad t_3 = 3,$$

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XVII. (Février 1917.) 4

(42)

en posant

$$\begin{aligned}x &= x_1 + \lambda(x_3 - x_1), \\y &= y_1 + \lambda(y_3 - y_1), \\z &= z_1 + \lambda(z_3 - z_1), \\t &= t_1 + \lambda(t_3 - t_1),\end{aligned}$$

on trouve encore $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, puis $\lambda = \frac{37}{3.58}$, d'où

$$x = 263, \quad y = 363, \quad z = 907, \quad t = 933,$$

solution irréductible, puisque 263 est premier. On a donc

$$\overline{933^3} = \overline{907^3} + \overline{363^3} + \overline{263^3}.$$

Pour obtenir d'autres solutions, posons

$$\begin{aligned}x &= 3 + u, \\y &= 4 + \mu u, \\z &= 5 + \nu u, \\t &= 6 + \lambda u,\end{aligned}$$

d'où

$$(6 + \lambda u)^3 = (3 + u)^3 + (4 + \mu u)^3 + (5 + \nu u)^3$$

et, en posant $\lambda^3 \mu^3 + \nu^3 + 1$,

$$u(3 + 4\mu^2 + 5\nu^2 - 6\lambda^2) = 36\lambda - 25\nu - 16\mu - 9.$$

Prenons $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, il vient

$$u = 3, \quad x = 6, \quad y = 7, \quad z = 8, \quad t = 9,$$

d'où

$$9^3 = 8^3 + 7^3 + 6^3$$

qui est une nouvelle solution très simple.

Prenons, maintenant, $\lambda = 9$, $\mu = 8$, $\nu = 6$; il vient

$$u = \frac{-37}{47},$$

d'où

$$x = 104, \quad y = -108, \quad z = 13, \quad t = -51,$$

(43)

d'où

$$\overline{108}^3 = \overline{104}^3 + \overline{51}^3 + \overline{13}^3.$$

Enfin, prenons $\mu = -9$, $\nu = 12$, $\lambda = 10$, il vient

$$u = \frac{65}{149}$$

et

$$x = 512, \quad y = 11, \quad z = 1525, \quad t = 1541,$$

d'où

$$\overline{1544}^3 = \overline{1525}^3 + \overline{512}^3 + \overline{11}^3.$$

II. Supposons connues deux solutions de l'équation

$$x^3 - y^3 + z^3 = t^3.$$

Si x_1, y_1, z_1, t_1 est une solution et x_2, y_2, z_2, t_2 en est une autre, posons

$$x = x_1 + \delta x_2,$$

$$y = y_1 - \delta y_2,$$

$$z = z_1 - \delta z_2,$$

$$t = t_1 + \delta t_2;$$

il vient

$$(t_1 + \delta t_2)^3 = (x_1 + \delta x_2)^3 + (y_1 - \delta y_2)^3 + (z_1 - \delta z_2)^3.$$

d'où

$$\delta = \frac{x_2 x_1^2 + y_2 y_1^2 + z_2 z_1^2 - t_2 t_1^2}{x_2^2 x_1 + y_2^2 y_1 + z_2^2 z_1 - t_2^2 t_1},$$

ce qui donne une troisième solution, et ainsi de suite. Nous avons appliqué cette méthode dans ce qui précède. On peut, comme l'on voit, obtenir une infinité de solutions de l'équation proposée.

III. Soit l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3 + t^3.$$

(44)

Soit x_1, y_1, z_1, t_1 une solution; posons

$$\begin{aligned}x &= x_1 + \rho u, \\y &= y_1 + \lambda u, \\z &= z_1 + \mu u, \\t &= t_1 + \nu u;\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}u^2[\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3] + 3u[\rho^2 x_1 + \lambda^2 y_1 - \mu^2 z_1 - \nu^2 t_1] \\+ 3[\rho x_1^2 + \lambda y_1^2 - \mu z_1^2 - \nu t_1^2] = 0.\end{aligned}$$

Première méthode. — Déterminons λ, μ, ν, ρ par la condition

$$\rho x_1^2 + \lambda y_1^2 - \mu z_1^2 - \nu t_1^2 = 0;$$

il vient

$$u = -3 \frac{\rho^2 x_1 + \lambda^2 y_1 - \mu^2 z_1 - \nu^2 t_1}{\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3},$$

d'où l'on tire x, y, z, t , c'est-à-dire une infinité de solutions.

Prenons, par exemple,

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 4, \quad z_1 = -5, \quad t_1 = 6,$$

puis

$$\lambda = 1, \quad \mu = 1, \quad \nu = 1,$$

d'où

$$\rho = \frac{25\mu + 36\nu - 16\lambda}{9} = 5,$$

d'où

$$u = -\frac{117}{62}$$

et

$$x = -399, \quad y = 131, \quad z = -427, \quad t = 255,$$

en négligeant le dénominateur 62, ce qui est permis, d'où

$$\overline{127}^3 + \overline{131}^3 = \overline{255}^3 + \overline{399}^3.$$

Deuxième méthode. — Considérons, plus simple-

(45)

ment, la solution

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 1, \quad t_1 = 1$$

et posons

$$x = 1 + \rho u,$$

$$y = 1 + \lambda u,$$

$$z = 1 + \mu u,$$

$$t = 1 + \nu u;$$

il vient

$$u^2[\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3] \\ + 3u[\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2] - 3(\rho + \lambda - \mu - \nu) = 0.$$

Choisissons pour λ, μ, ν, ρ une solution de l'équation

$$\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3 = 0;$$

en d'autres termes, supposons connue une solution de l'équation

$$x^3 + y^3 - z^3 - t^3 = 0,$$

il vient

$$u = -\frac{\rho + \lambda - \mu - \nu}{\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}.$$

Soit, par exemple,

$$\lambda = 3, \quad \rho = 4, \quad \mu = -5, \quad \nu = 6;$$

on en déduit

$$u = \frac{1}{6}$$

et

$$x = \frac{10}{6}, \quad y = \frac{9}{6}, \quad z = \frac{1}{6}, \quad t = \frac{12}{6},$$

d'où

$$\frac{-3}{10} + \frac{-3}{9} = \frac{-3}{12} + 1^3,$$

solution très simple.

En général, on a

$$\begin{aligned}
x &= 1 + \rho u = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \rho(\lambda - \mu - \nu)}{D}, \\
y &= 1 + \lambda u = \frac{\rho^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda(\rho - \mu - \nu)}{D}, \\
z &= \dots\dots\dots \\
t &= \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

on peut négliger le dénominateur commun D.

Prenons, par exemple, en nous servant du résultat précédent,

$$\lambda = 10, \quad \rho = -1, \quad \mu = 12, \quad \nu = -9;$$

il vient, en négligeant le dénominateur commun,

$$x = 59, \quad y = 92, \quad z = 98, \quad t = 35,$$

d'où

$$\frac{-3}{92} + \frac{-3}{39} = \frac{-3}{98} + \frac{-3}{35}$$

et ainsi de suite.

IV. De l'équation

$$x^3 = y^3 + z^3 + t^3 + u^3,$$

considérons les deux solutions :

$$\begin{aligned}
y_1 = 0, & \quad x_1 = 6, & z_1 = 3, & t_1 = 4, & u_1 = 5, \\
y_2 = 1, & x_2 = 1, & z_2 = 1, & t_2 = -1, & u_2 = 0.
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \\
y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

d'où

$$(6 - 5\lambda)^3 = \lambda^3 + (3 - 2\lambda)^3 + (4 - 5\lambda)^3 + (5 - 5\lambda)^3$$

ou

$$132\lambda^2 + A\lambda + 129 = 0,$$

(47)

équation qui admet la solution $\lambda = 1$, puis $\lambda = \frac{129}{132} = \frac{43}{44}$,
d'où

$$x = 49, \quad y = 43, \quad z = 46, \quad t = -39, \quad u = 5,$$

d'où

$$\frac{-3}{49} + \frac{-3}{39} = \frac{-3}{43} + \frac{-2}{46} + \frac{-5}{5}.$$

V. Équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0.$$

Soit une solution x, y, z ; posons

$$\begin{aligned} X &= x + \lambda \delta, \\ Y &= y + \lambda' \delta, \\ Z &= z + \delta. \end{aligned}$$

Annulons le coefficient de δ dans l'équation

$$aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0,$$

il vient

$$a\lambda x^2 + b\lambda' y^2 + c z^2 = 0$$

et

$$\delta = -3by^3 \frac{by^3(a\lambda^2 x + cz) + (cz^2 + a\lambda x^2)^2}{b^2 y^6 (a\lambda^3 + c) - (cz^2 + a\lambda x^2)^3};$$

le numérateur se réduit à $(\lambda x - z)^2$, et le dénominateur est divisible par $(\lambda x - z)^2$, et la solution devient, en négligeant $(\lambda x - z)$,

$$\begin{aligned} X &= x(b y^3 - c z^3), \\ Y &= y(c z^3 - a x^3), \\ Z &= z(a x^3 - b y^3), \end{aligned}$$

qui donne une nouvelle solution quand on en connaît une, et par conséquent, une suite, **simplement infinie**, de solutions.

Soit, par exemple, l'équation

$$2x^3 + 3y^3 - 13z^3 = 0,$$

(48)

qui admet la solution évidente

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 1;$$

elle admet une autre solution

$$X = 20,$$

$$Y = 29,$$

$$Z = 19,$$

d'où

$$2 \cdot 20^3 + 3 \cdot 29^3 = 13 \cdot 19^3.$$

Considérons, de même, l'équation

$$x^3 + y^3 - 43z^3 = 0,$$

qui admet la solution

$$x = 1, \quad y = 7, \quad z = 2;$$

elle admet une autre solution

$$X = 687 = 3 \cdot 229,$$

$$Y = -7 \cdot 345 = -3 \cdot 805,$$

$$Z = -2 \cdot 343 = -3 \cdot 228,$$

d'où

$$\overline{229}^3 + 43 \cdot \overline{228}^3 = \overline{805}^3.$$

Soit, encore, l'équation

$$x^3 + y^3 - 19z^3 = 0.$$

qui admet la solution

$$x = 3, \quad y = 5, \quad z = 2;$$

elle admet aussi la solution

$$X = 831,$$

$$Y = -895,$$

$$Z = -196.$$

VI. Soit l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + u^3 - v^3 = 0.$$

Nous avons les deux solutions

$$\begin{aligned} x_1 &= -6, & x_2 &= -1; \\ y_1 &= 3, & y_2 &= 1; \\ z_1 &= 0, & z_2 &= -1; \\ t_1 &= 5, & t_2 &= 1; \\ u_1 &= 0, & u_2 &= -1; \\ v_1 &= 1, & v_2 &= 1. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= x_2 + \lambda(x_1 - x_2), \\ y &= y_2 + \lambda(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

On en déduit une équation en λ qui admet les solutions

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = -\frac{3}{4},$$

d'où

$$x = 11, \quad y = -2, \quad z = -7, \quad t = -8, \quad u = -7, \quad v = -5,$$

d'où

$$11^3 = 2^3 + 7^3 + 8^3 - 7^3 + 5^3.$$

VII. Considérons l'équation

$$ax^3 + by^3 - cz^3 = 0$$

et deux solutions

$$x'y'z', \quad x''y''z''.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= x' + \delta x'', \\ y &= y' + \delta y'', \\ z &= z' + \delta z'', \end{aligned}$$

d'où

$$\delta = -\frac{ax'^3x'' + by'^3y'' - cz'^3z''}{ax'x''^2 + \dots},$$

d'où

$$\begin{aligned}x &= by'y''(x'y'' - y'x'') + cz'z''(x'z'' - z'x''), \\y &= cz'z''(y'z'' - z'y'') + ax'x''(y'x'' - x'y''), \\z &= ax'x''(z'x'' - x'z'') + by'y''(z'y'' - y'z'');\end{aligned}$$

cette solution ne rentre pas dans la suite des solutions du paragraphe V.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 + y^3 = 2z^3,$$

qui admet la solution

$$x' = 1, \quad y' = 1, \quad z' = 1;$$

soit x'' , y'' , z'' une autre solution, une troisième solution sera donnée par les formules

$$\begin{aligned}x &= y''^2 - x''y'' - 2z''^2 + 2x''z'', \\y &= x''^2 - x''y'' - 2z''^2 + 2z''y'', \\z &= x''^2 + y''^2 - x''z'' - y''z'',\end{aligned}$$

d'où l'on déduit ce résultat, purement algébrique, à savoir : si l'on a

$$x^3 + y^3 = 2z^3,$$

on a aussi

$$X^3 + Y^3 = 2Z^3,$$

avec

$$\begin{aligned}X &= y^2 - xy - 2z^2 + 2xz, \\Y &= x^2 - xy - 2z^2 + 2zy, \\Z &= x^2 + y^2 - xz - yz.\end{aligned}$$

Une seule solution x' , y' , z' , de l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0,$$

en fournit immédiatement une deuxième, x'' , y'' , z'' , par le procédé du paragraphe V; d'où, par la méthode précédente, on déduit une troisième solution, et ainsi de suite.

Considérons, par exemple, l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0,$$

qui admet la solution

$$x' = 1, \quad y' = 1, \quad z' = 1,$$

si l'on a

$$a + b + c = 0.$$

Elle admet la solution

$$\begin{aligned} x'' &= b - c, \\ y'' &= c - a, \\ z'' &= a - b, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} x''' &= (b - c)[b(c - a)^3 - c(a - b)^3], \\ y''' &= (c - a)[c(a - b)^3 - a(b - c)^3], \\ z''' &= (a - b)[a(b - c)^3 - b(c - a)^3]. \end{aligned}$$

En combinant, d'autre part, les solutions $x', y', z', x'', y'', z''$, par les formules du paragraphe VII, on trouve de nouvelles solutions, dont la première est

$$\begin{aligned} x &= b(c - a)(2c - a - b) + c(a - b)(a + c - 2b), \\ y &= \dots\dots\dots \\ z &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

La même méthode s'applique à l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

Si l'on a deux solutions, on en a une troisième par les formules

$$\begin{aligned} x &= by'y''(x'y'' - x''y') + cz'z''(x'z'' - x''z') + dt't''(x't'' - x''t'), \\ y &= \dots\dots\dots \\ z &= \dots\dots\dots \\ t &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3t^3 = 0$$

qui admet la solution

$$x' = 1, \quad y' = 1, \quad z' = 1, \quad t' = 1;$$

si l'on connaît une autre solution x, y, z, t on en aura une troisième par les formules

$$\begin{aligned} X &= y(y - x) + z(z - x) - 3t(t - x), \\ Y &= z(z - y) - 3t(t - y) + x(x - y), \\ Z &= \dots\dots\dots, \\ T &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ce résultat, purement algébrique, donne une relation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3T^3 = 0,$$

entre quatre quantités quelconques x, y, z, t , liées par la relation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3t^3 = 0.$$

On peut, évidemment, généraliser ces formules.

Pour résoudre l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3t^3 = 0,$$

nous pouvons, suivant une méthode déjà indiquée, poser

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \delta, \\ y &= 1 + \lambda' \delta, \\ z &= 1 + \lambda'' \delta, \\ t &= 1 + \delta; \end{aligned}$$

d'où, en annulant le coefficient de δ , il vient

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda' + \lambda'' &= 3, \\ \delta &= -3 \frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 - 3}{\lambda^3 + \lambda'^3 + \lambda''^3 - 3}, \end{aligned}$$

ce qui donne une double infinité de valeurs pour x, y, z, t . Particularisons en prenant $\lambda = 2$, il vient

$$\lambda + \lambda' = 1,$$

d'où

$$x = -2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2,$$

$$y = 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda,$$

$$z = -3\lambda^2 + 3\lambda - 2,$$

$$t = -\lambda^2 + \lambda.$$

En donnant à λ une valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative, on aura une suite infinie de solutions. On peut remarquer que $x + y + z = 3t$, donc l'équation

$$g(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)^3$$

admet les mêmes solutions en x, y, z avec le paramètre arbitraire λ , ce qui donne encore une identité algébrique.

VIII. Nous allons étudier certaines équations indéterminées en partant d'une identité nouvelle que nous allons établir. Considérons l'équation

$$x^3 - y^3 = a \cdot b;$$

on peut la résoudre en prenant

$$x - y = a,$$

$$x^2 + xy + y^2 = b,$$

d'où

$$x = a + y,$$

$$3y^2 + 3ay + a^2 - b = 0,$$

$$y = \frac{-3a \pm \sqrt{12b - 3a^2}}{6}.$$

Posons

$$\begin{aligned} 12b - 3a^2 &= t^2, \\ b &= \frac{3a^2 + t^2}{12}, \quad a = 2a', \quad t = 6t', \\ b &= a'^2 + 3t'^2. \end{aligned}$$

Exprimons que b est un cube,

$$a'^2 - 3t'^2 = \lambda^3 = (u^2 + 3v^2)^3,$$

d'où

$$a' + t' \sqrt{-3} = (u + v \sqrt{-3})^3,$$

d'où

$$\begin{aligned} a' &= u^3 - 9uv^2, \\ t' &= 3u^2v - 3v^3; \\ y &= t' - a', \\ x &= t' + a'; \\ y &= 3u^2v - 3v^3 - u^3 + 9uv^2, \\ x &= 3u^2v - 3v^3 + u^3 - 9uv^2, \end{aligned}$$

d'où l'identité

$$\begin{aligned} (1) \quad [3u^2v - 3v^3 + u^3 - 9v^2u]^3 &+ [u^3 + 3v^3 - 3u^2v - 9uv^2]^2 \\ &\equiv 2(u^3 - 9uv^2)(u^2 + 3v^2)^3. \end{aligned}$$

Faisons $v = 1$, $u = 4$; on en déduit que l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3$$

admet la solution

$$x = 73, \quad y = -17, \quad z = 38.$$

Faisons $v = 1$, $u = 6$; on en déduit que l'équation

$$x^3 + y^3 = 12z^3$$

admet la solution

$$x = 19, \quad y = 89, \quad z = 39.$$

En faisant $u = 7$, $v = 3$, on retrouve la solution, précédemment obtenue, de l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3.$$

En faisant $v = 2$, $u = 3$, on a

$$u^3 - 9uv^2 = -3.27;$$

l'équation

$$x^3 + y^3 = +6z^3$$

admet donc la solution

$$x = 17, \quad y = 37, \quad z = 21.$$

IX. Dans l'identité (1), faisons

$$u - 3v = (6a')^3,$$

$$u + 3v = (6b')^3,$$

d'où

$$2u = 6^3(a'^3 + b'^3),$$

$$3v = 6^2(b'^3 - a'^3),$$

$$2u(u - 3v)(u + 3v) = 2(u^3 - 9uv^2) = (a'^3 + b'^3)(216a'b')^3.$$

Si a' et b' satisfont à l'équation

$$a'^3 + b'^3 = m\lambda^3,$$

en posant

$$a'^3 = \alpha, \quad b'^3 = \beta,$$

les valeurs

$$X = \beta^3 + 6\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - \alpha^3,$$

$$Y = \alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3,$$

$$Z = 3a'b'\lambda(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

sont solutions de l'équation

$$X^3 - Y^3 = mZ^3.$$

On a donc une seconde solution de l'équation

$$x^3 + y^3 = mz^3,$$

$x = a'$, $y = b'$, $z = \lambda$ étant une première solution. La méthode employée est tout à fait différente des précédentes.

X. Transformons l'identité (1) en posant

$$u = 4\alpha^3,$$

$$u + 3v = \beta^3,$$

d'où

$$u - 3v = 8\alpha^3 - \beta^3.$$

Soit

$$2x = \beta + 1,$$

il vient

$$8x^3 - \beta^3 = 3\beta^2 + 3\beta + 1.$$

L'identité devient

$$X^3 + Y^3 = (3\beta^2 + 3\beta + 1)Z^3$$

avec

$$Z = 2x\beta(u^2 + 3v^2)$$

et l'on a

$$u = \frac{(\beta + 1)^3}{2}, \quad v = \frac{3\beta^2 + 3\beta + 1 - \beta^3}{6};$$

$$X = 3u^2v - 3v^3 + u^3 - 9uv^2,$$

$$Y = u^3 + 3v^3 - 3u^2v - 9uv^2,$$

$$Z = \beta(\beta + 1)(u^2 + 3v^2).$$

En donnant à β des valeurs entières, positives ou négatives, on aura, après suppression, s'il y a lieu, d'un dénominateur commun à X, Y, Z, une solution de l'équation

$$X^3 + Y^3 = mZ^3$$

pour toutes les valeurs de m qui appartiennent à la forme

$$3\beta^2 + 3\beta + 1.$$

En donnant à β une valeur fractionnaire $\frac{a}{b}$, on aura une solution de l'équation

$$b^2x^3 + b^2y^3 = (3a^2 + 3ab + b^2)z^3.$$

Faisons, par exemple, $a = 1$, $b = 2$, nous aurons

$$4x^3 + 4y^3 = 13z^3;$$

(57)

$$a = 1, b = 3, \quad 3x^3 + 3y^3 = 7z^3;$$

$$a = -1, b = 3, \quad 3x^3 + 3y^3 = z^3;$$

$a = 3, b = -2$; on retrouve l'équation

$$4x^3 + 4y^3 = 13z^3.$$

Faisons enfin $a = 2, b = -3^{\frac{1}{2}}$, nous retrouvons

$$3x^3 + 3y^3 = z^3.$$

Si nous faisons $b = 8$, comme b^2 est un cube, en posant

$$\begin{aligned} 4x &= x', \\ 4y &= y', \end{aligned}$$

nous aurons une solution de l'équation

$$x'^3 + y'^3 = (3a^2 + 24a + 64)z^3,$$

x' et y' devant être multiples de 4; il y aura une discussion à faire.

Il faut remarquer que l'équation

$$x^3 + y^3 = m z^3,$$

quand $m = 3\beta^2 + 3\beta + 1$, admet la solution évidente

$$\begin{aligned} x &= \beta + 1, \\ y &= -\beta, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Pour $\beta = 3$, l'équation

$$x^3 + y^3 = 37z^3$$

admet la solution

$$x = 4, \quad y = -3, \quad z = 1.$$

De même

$$x^3 + y^3 = 61z^3$$

admet la solution

$$x = 5, \quad y = -4, \quad z = 1.$$

De même

$$x^3 + y^3 = 91 z^3$$

admet la solution

$$x = 6, \quad y = -5, \quad z = 1.$$

La méthode que nous avons exposée permet d'obtenir une seconde solution, différente de la solution évidente.

Remarques. — 1° En donnant dans l'identité (1) à $u - 3v$, $u + 3v$, des valeurs fractionnaires, on trouve de nouvelles équations, dont on a ainsi une solution.

Prenons, par exemple,

$$u - 3v = \frac{1}{2},$$

$$u + 3v = \frac{1}{4};$$

on trouve alors l'équation

$$4x^3 + 4y^3 = 3z^3$$

et la solution

$$x = 37, \quad y = 17, \quad z = 42,$$

qui coïncide avec la solution

$$x = 37, \quad y = 17, \quad z = 21$$

de l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3.$$

2° Dans le produit $2u(u - 3v)(u + 3v)$, posons

$$2u = z^2,$$

$$u - 3v = x,$$

$$u + 3v = x^2,$$

d'où

$$x^2 + x = z^2.$$

Si une pareille équation était possible, l'équation

$$X^3 + Y^3 = Z^3$$

aurait des solutions entières, et l'on sait que c'est impossible.

De même, posons

$$u - 3v = x^4y,$$

$$u + 3v = y^2,$$

$$2u = z^3,$$

d'où

$$z^3 = y^2 + x^3y$$

et cette équation est impossible, en vertu de ce qui précède.

On en déduit que l'équation

$$x^6 + 4z^3 = t^2$$

est, aussi, impossible.