

**Certificat d'aptitude à l'enseignement
secondaire des jeunes filles (Deuxième partie)**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 373-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__373_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CERTIFICAT D'APTITUDE
A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES.**

(DEUXIÈME PARTIE).

Session de 1917.

I. *On donne deux droites orientées u et v non situées dans un même plan, un point A sur la première, un point B sur la seconde; cette figure dépend, pour la grandeur, de quatre paramètres (longueur de la perpendiculaire commune CD , ...). Faire voir qu'il existe une sphère Σ tangente à la droite u au point A , à la droite v au point B , et que, si O est le centre de cette sphère, il existe une droite Oz orthogonale à la droite AB et faisant des angles égaux avec les directions u et v . On rapporte la figure à un trièdre trirectangle Ox, Oy, Oz , l'origine O et l'axe Oz étant le point O et la*

1° *Établir la relation qui existe entre les quantités $\overline{AM} = \rho$, $\overline{BN} = \sigma$. Cette relation peut recevoir la forme*

$$(1) \quad (1 - C)\rho\sigma - A\rho - B\sigma + D = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= b\alpha + a\beta + c\gamma, & B &= a\lambda + b\mu + c\gamma, \\ C &= \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma^2, & D &= (a - b)^2. \end{aligned}$$

Indiquer le sens géométrique des constantes C, A et B.

2° *Faire voir que la droite Δ reste tangente à la sphère Σ . Pour cela, après avoir écrit pour les coordonnées d'un point P de cette droite*

$$x = \frac{x' + kx''}{1 + k}, \quad y = \frac{y' + ky''}{1 + k}, \quad \dots, \quad k = -\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}},$$

on formera l'équation qui donne les valeurs de k correspondant aux points d'intersection de la droite avec la sphère, on introduira ρ et σ et l'on trouvera

$$(k\sigma + \rho)^2 = 0.$$

De la valeur trouvée pour k on déduira que, si P est le point de contact de la droite avec la sphère, on a, en orientant convenablement la droite Δ ,

$$\overline{PM} = \overline{AM}, \quad \overline{PN} = \overline{BN}, \quad \overline{NM} = \overline{AM} - \overline{BN}.$$

3° *Calculer la cote z du point P et en déduire le lieu de ce point. La droite Δ étant orientée comme on vient de dire, calculer le cosinus de l'angle de cette droite avec Oz. En déduire géométriquement le lieu de la droite Δ .*

III. *Soient M₁ la position du point M lorsque le*

point N est à l'infini, et N₂ la position du point N lorsque le point M est à l'infini; soit CD la perpendiculaire commune aux deux droites u et v; on pose

$$\rho_1 = \overline{AM_1}, \quad \sigma_2 = \overline{BN_2}, \quad \rho' = \overline{AC}, \quad \sigma' = \overline{BD}.$$

Établir qu'on a

$$\rho_1 = \frac{B}{1-C}, \quad \sigma_2 = \frac{A}{1-C}, \quad \rho' - C\sigma' = A, \quad \sigma' - C\rho' = B,$$

d'où

$$\rho' + \sigma' = \rho_1 + \sigma_2, \quad \overline{CM_1} + \overline{DN_2} = 0.$$

Montrer qu'on peut, sans modifier les points M et N, déplacer les points A et B et réaliser la condition $\overline{AC} + \overline{BD} = 0$, c'est-à-dire

$$\rho' + \sigma' = 0, \quad \rho_1 + \sigma_2 = 0, \quad A + B = 0;$$

les points M₁ et N₂ sont alors déterminés par les relations

$$\frac{\rho_1}{\rho'} = \frac{\sigma_2}{\sigma'} = -\cot^2 \frac{1}{2}(u, v).$$

On peut, dans l'hypothèse précédente ($A + B = 0$), changer simultanément ρ en $-\sigma$ et σ en $-\rho$, ce qui revient à changer \overline{CM} en $-\overline{DN}$ et \overline{DN} en $-\overline{CM}$; rendre compte de ce fait géométriquement.

Déduire directement de la relation (1) les conditions dans lesquelles cette relation est de la forme

$$\rho\sigma = \text{const.}$$

SOLUTION

Par UNE ABONNÉE.

Je prie le lecteur de se reporter à l'énoncé quand il y a lieu.

I. Les quatre paramètres dont dépend la figure sont la longueur de la perpendiculaire commune \overline{CD} , l'angle des deux droites, les valeurs des quantités \overline{CA} et \overline{DB} . Le centre de la sphère Σ est l'intersection des plans perpendiculaires aux droites u et v en A et B et du plan perpendiculaire à la droite AB en son milieu. Pour avoir la droite Oz on mène par le point O des parallèles aux droites orientées u et v , et l'on prend l'intersection du plan mené par la bissectrice de l'angle de ces parallèles perpendiculairement à leur plan avec le plan mené par O perpendiculairement à la droite AB. Les cinq relations qui lient *a priori* les neuf quantités R, ... sont, en observant que les coordonnées du point B sont b, a, c ,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= R^2, \\ a\alpha + b\beta + c\gamma &= 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ b\lambda + a\mu + c\gamma &= 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2 &= 1; \end{aligned}$$

si l'on voulait tirer λ et μ des deux dernières, on rencontrerait la solution étrangère $\lambda = \beta, \mu = \alpha$. Les formules demandées pour les points M et N sont

$$x' = a + \alpha\rho, \quad \dots, \quad x'' = b + \lambda\sigma, \quad \dots$$

II. 1° La relation $\overline{NM}^2 = (\overline{AM} - \overline{BN})^2$ donne

$$\begin{aligned} [a - b + (\alpha\rho - \lambda\sigma)]^2 \\ + [(b - a) + (\beta\rho - \mu\sigma)]^2 + \gamma^2(\rho - \sigma)^2 = (\rho - \sigma)^2, \end{aligned}$$

ou, après suppression du facteur 2,

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + (a - b)(\alpha\rho - \lambda\sigma - \beta\rho + \mu\sigma) \\ + [1 - \alpha\lambda - \beta\mu - \gamma^2]\rho\sigma = 0; \end{aligned}$$

le coefficient de ρ est

$$ax - bx - a\beta + b\beta \quad \text{ou} \quad -(bx + a\beta + c\gamma),$$

et l'on a de même celui de σ . On a bien

$$(1) \quad (1 - C)\rho\sigma - A\rho - B\sigma + D = 0,$$

les coefficients ayant les valeurs indiquées par l'énoncé.

On a évidemment

$$A = R \cos(OB, u), \quad B = R \cos(OA, v) \quad C = \cos(u, v).$$

2° L'équation en h demandée est

$$(x' + hx'')^2 + (y' + hy'')^2 + (z' + hz'')^2 - (1 + h)^2 R^2 = 0.$$

Le coefficient de h^2 est

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 - R^2,$$

et, en tenant compte des relations écrites au début, il se réduit à σ^2 ; le terme indépendant est de même ρ^2 ; le coefficient de ρh est

$$ax'' - y'y'' + z'z'' - R^2,$$

ou

$$C\rho\sigma + A\rho + B\sigma - D.$$

ou $\rho\sigma$, d'après la relation (1). Cette équation est donc

$$(h\sigma + \rho)^2 = 0;$$

la valeur double trouvée pour h indique bien que la droite Δ est tangente à la sphère Σ . On a, d'ailleurs, pour le point P, d'après la signification de h ,

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = \frac{\rho}{\sigma},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{AM} - \overline{BN}}{\overline{NM}} = +1.$$

(379)

en tenant compte de la relation

$$\overline{NM}^2 = (\overline{AM} - \overline{BN})^2$$

et en orientant convenablement la droite Δ ; on a alors

$$\overline{NM} = \overline{AM} - \overline{BN}.$$

3° On a, pour le point P,

$$z = \frac{z' + kz''}{1+k} = \frac{\sigma z' - \rho z''}{\sigma - \rho} = \frac{\sigma(c + \gamma\rho) - \rho(c + \gamma\sigma)}{\sigma - \rho} = c;$$

le lieu du point P est la section de la sphère par le plan $z = c$.

Le cosinus de l'angle de la droite Δ avec Oz est

$$\frac{z' - z''}{NM} = \frac{\gamma(\rho - \sigma)}{\rho - \sigma} = \gamma;$$

l'angle de Δ avec Oz est constant et égal à l'angle que les droites u et v font avec Oz .

Le lieu de la droite Δ est un hyperboloïde de révolution d'axe Oz , et la sphère Σ est inscrite à cet hyperboloïde. Les droites u et v sont deux génératrices du second système. On s'explique bien qu'on ait :

$$\overline{PM} = \overline{AM}, \quad \overline{PN} = \overline{BN}, \quad \overline{NM} = \overline{PM} - \overline{PN} = \overline{AM} - \overline{BN}.$$

III. *a.* On a immédiatement, comme il est bien connu pour une relation homographique,

$$\rho_1 = \frac{B}{1-C}, \quad \sigma_2 = \frac{A}{1-C};$$

la relation (1) donne

$$\overline{M_1M} \times \overline{N_2N} = \text{const.}$$

Soit CD la perpendiculaire commune aux deux

(380)

droites u et v , et posons

$$\rho' = \overline{AC}, \quad \sigma' = \overline{BD};$$

les coordonnées des points C et D étant

$$\begin{array}{lll} a + \alpha\rho', & b + \beta\rho', & c + \gamma\rho', \\ b + \lambda\sigma', & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \end{array}$$

en écrivant que la droite CD est perpendiculaire à la droite u , on a

$$\alpha(x' - x'') + \dots + \dots = 0,$$

ou

$$(\alpha x' + \dots) - (\alpha x'' + \dots) = 0,$$

ou

$$ax + b\beta + c\gamma + \rho' - (bx + a\beta + c\gamma) - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma^2)\sigma' = 0,$$

ou

$$\rho' - C\sigma' = A;$$

on a de même, en écrivant que la droite CD est perpendiculaire à la droite v ,

$$\sigma' - C\rho' = B.$$

On a, en additionnant ces deux relations,

$$\rho' + \sigma' = \frac{A + B}{1 - C} = \rho_1 + \sigma_2,$$

d'où

$$(\rho_1 - \rho') + (\sigma_2 - \sigma') = 0,$$

ou

$$(2) \quad \overline{CM_1} + \overline{DN_2} = 0;$$

ainsi les deux points M_1 et N_2 ne sont pas quelconques, les deux vecteurs (CM_1) et (DN_2) ont des mesures opposées.

b. La relation

$$\overline{NM} = \overline{AM} - \overline{BN}$$

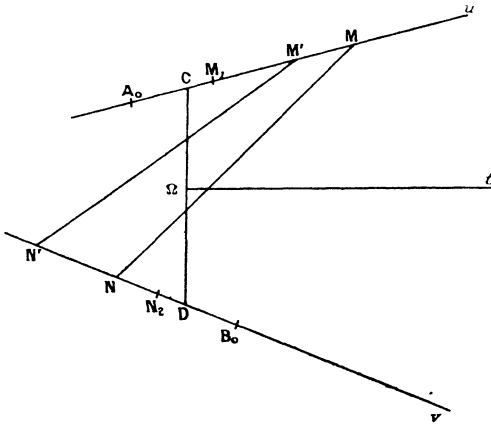
ne cessera pas d'être satisfaite *avec les mêmes points M et N* si l'on remplace les points primitifs A et B par deux points A' et B' obtenus en faisant subir aux premiers des déplacements égaux sur les droites orientées u et v ; le choix de ces points n'introduit donc qu'un paramètre dans la question, et l'on s'explique ainsi que les points M_1 et N_2 dépendent l'un de l'autre.

En particulier, on peut prendre comme points A et B deux points spéciaux A_0 et B_0 tels qu'on ait

$$(3) \quad \overline{A_0 C} + \overline{B_0 D} = 0,$$

comme sur la figure 2; il suffit de faire subir aux points primitifs A et B des déplacements égaux ayant pour

Fig. 2.



valeur commune $\frac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2}$; on a alors $A_0 M_1 + B_0 N_2 = 0$.

On a donc, avec ces points spéciaux A_0 et B_0 ,

$$\rho' + \sigma' = 0, \quad \rho_1 + \sigma_2 = 0,$$

d'où

$$A + B = 0;$$

cela donne

$$\rho' = \frac{A}{1+C} = \frac{-B}{1-C}, \quad \sigma' = \frac{B}{1+C} = \frac{-A}{1+C};$$

on a, pour déterminer les points M_1 et N_2 , les formules

$$(4) \quad \frac{\rho_1}{\rho'} = \frac{\sigma_2}{\sigma'} = -\frac{1+C}{1-C} = -\cot^2 \frac{1}{2}(u, v),$$

qui ont un caractère géométrique.

Avec ces points spéciaux A_0, B_0 , dont l'emploi ne particularise nullement le problème, la relation (1) devient

$$(5) \quad (1-C)\rho\sigma - A(\rho - \sigma) + D = 0;$$

si elle est satisfaite pour les valeurs $\rho = p, \sigma = q$, elle l'est aussi pour les valeurs $\rho' = -q, \sigma' = -p$. Cela veut dire que si l'on a pour deux points M et N (*fig. 2*)

$$\overline{NM} = \overline{A_0M} - \overline{B_0N},$$

et si l'on prend

$$\overline{A_0M'} = -\overline{B_0N}, \quad \overline{B_0N'} = -\overline{A_0M}$$

ou

$$\overline{A_0C} + \overline{CM'} = -\overline{B_0D} - \overline{DN'}, \quad \overline{B_0D} + \overline{DN'} = -\overline{A_0C} - \overline{CM},$$

ou enfin, A_0 et B_0 disparaissant,

$$(6) \quad \overline{CM'} = -\overline{DN}, \quad \overline{DN'} = -\overline{CM},$$

on aura encore

$$\overline{VM'} = \overline{AM'} - \overline{BN'};$$

et c'est là une propriété de la figure considérée en elle-même, indépendamment du choix particulier qu'on peut faire des points A et B . Cette propriété est

d'ailleurs évidente. On a d'une part, avec (6),

$$\overline{AM'} - \overline{BN'} = \overline{AM} - \overline{BN},$$

car cela équivaut à

$$\overline{AC} + \overline{CM'} - \overline{BD} - \overline{DN'} = \overline{AC} + \overline{CM} - \overline{BD} - \overline{DN},$$

ce qui a lieu. D'autre part, si l'on mène par le milieu Ω du segment CD des parallèles aux droites orientées u et v , et si Ωt est la bissectrice de l'angle de ces parallèles, on passe du segment MN au segment N'M' par deux renversements successifs, l'un autour de Ωt , l'autre autour de CD; on a donc $N'M' = NM$.

c. Voici maintenant un cas particulier. Si les points primitifs A et B sont tels qu'on ait $\overline{AC} = \overline{BD}$, les points spéciaux A_0 et B_0 sont les points C et D. Avec les points primitifs A et B, on a alors $\rho' = \sigma'$, $A = B$, et la relation (1) est involutive; avec les points spéciaux C et D, les coefficients A et B sont nuls et l'on a simplement

$$\rho\sigma = \text{const.}$$

On a ici, avec les points primitifs A et B,

$$\rho' = \frac{A}{1-C} = \rho_1, \quad \sigma' = \frac{B}{1-C} = \sigma_2,$$

de sorte que M_1 est en C, N_2 est en D; cela est évident sur la relation fournie par les points spéciaux C et D.

A priori, si l'on veut que la relation (1) entre ρ et σ soit de la forme $\rho\sigma = \text{const.}$, il faut que A et B soient nuls, c'est-à-dire, d'après l'interprétation qu'on a donnée des valeurs de ces coefficients, il faut que la droite OB soit orthogonale à la droite u , que la droite OA soit orthogonale à la droite v ; les directions OA et OB doivent donc se confondre l'une et

l'autre avec celle de la perpendiculaire commune CD, les droites OA et OB se confondent, et CD se confond avec la droite AOB qui rencontre u et v .

Il ne faut pas confondre la relation générale

$$\overline{M_1 M} \times \overline{N_2 N} = \text{const.}$$

avec la relation $\varphi\sigma = \text{const.}$ relative au cas particulier dont on vient de s'occuper. Les points M_1 et N_2 ne forment généralement pas un couple de points pouvant être substitués aux points A et B; il n'en sera ainsi que si l'on a

$$\overline{AM_1} = \overline{BN_2},$$

c'est-à-dire

$$A = B, \quad \varphi' = \sigma', \quad \overline{AC} = \overline{BD},$$

et c'est seulement alors qu'on pourra faire de $\overline{M_1 M}$ et de $\overline{N_2 N}$ un ρ et un σ .

Remarque. — Il serait facile de démontrer géométriquement que la droite Δ est tangente à la sphère Σ en introduisant le point P dès le début, de trouver le lieu du point P, sans oublier les réciproques, etc.

Si l'on considère deux positions Δ et Δ'' de la droite Δ , on a

$$\overline{NM} = \overline{AM} - \overline{BN},$$

$$\overline{N''M''} = \overline{AM''} - \overline{BN''}$$

et, par suite,

$$\overline{NM} - \overline{N''M''} = \overline{M''M} - \overline{N''N},$$

ou

$$\overline{MN} + \overline{NN''} + \overline{N''M''} + \overline{M''M} = 0,$$

dans le quadrilatère gauche $MNN''M''$ qui est circonscrit à la sphère Σ . La question se rattache ainsi à la question de Mathématiques élémentaires du concours pour l'agrégation des hommes en 1912.