

F. GOMES TEIXEIRA

**Sur une manière d'engendrer les cubiques unicursales et une classe de quartiques, et sur une relation entre deux transformations**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 17 (1917), p. 281-289

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1917\\_4\\_17\\_\\_281\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__281_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

[M'5d] [M'6]

**SUR UNE MANIÈRE D'ENGENDRER LES CUBIQUES UNICURSALES  
ET UNE CLASSE DE QUARTIQUES, ET SUR UNE RELATION  
ENTRE DEUX TRANSFORMATIONS;**

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

---

Nous allons donner une manière nouvelle d'engendrer, au moyen d'une conique donnée, les cubiques unicursales et les quartiques qui ont un point double et deux asymptotes réelles coïncidentes à distance finie. et signaler ensuite une relation entre une transformation géométrique générale que cette construction suggère et la transformation qu'on obtient en généralisant la construction donnée par Descartes de la conchoïde parabolique.

1. Traçons sur un plan une conique (C) et une droite (D), et prenons sur cette droite un point O et sur la conique un point A. Menons par ce point une droite (D<sub>1</sub>) de direction arbitraire et représentons par B le second point où elle coupe la conique. Menons enfin par ce point une perpendiculaire à la droite (D) et par O une parallèle à la droite (D<sub>1</sub>), et désignons par M le point où ces dernières droites se coupent. Cela posé, nous avons les théorèmes suivants :

1° *Le lieu décrit par M, quand la droite (D<sub>1</sub>)*  
*Ann. de Mathémat., 4<sup>e</sup> série, t. XVII. (Août 1917.)* 22

varie, est une cubique unicursale, qui a son point double à O et dont une asymptote est perpendiculaire à la droite (D) et les autres sont parallèles à celles de la conique.

2° Réciproquement, si l'on donne une cubique unicursale ayant son point double à distance finie, on peut déterminer d'une infinité de manières une conique et un point A tels que la cubique puisse être construite par la méthode précédente.

Prenons le point O pour origine des coordonnées orthogonales et la droite (D) pour axe des abscisses; désignons par  $(\alpha, \beta)$  les coordonnées du point A, par  $(x_1, y_1)$  celles du point B, par  $(X, Y)$  celles du point M et par  $\lambda$  le coefficient angulaire de la droite  $(D_1)$ ; et supposons que la conique soit représentée par l'équation

$$(1) \quad Hy^2 + Kxy + Lx^2 + My + Nx + P = 0.$$

L'équation de la droite  $(D_1)$  est

$$y - \beta = \lambda(x - \alpha),$$

et cette droite coupe la conique au point A et à un autre point dont l'abscisse est déterminée par l'équation

$$(2) \quad (H\lambda^2 + K\lambda + L)x^2 \\ + [-2\alpha H\lambda^2 + (2\beta H - K\alpha + M)\lambda + K\beta + N]x \\ + H\alpha^2\lambda^2 - \alpha(2H\beta + M)\lambda + H\beta^2 + M\beta + P = 0.$$

Nous avons donc

$$\alpha + x_1 = \frac{2\alpha H\lambda^2 - (2\beta H - K\alpha + M)\lambda - K\beta - N}{H\lambda^2 + K\lambda + L}.$$

Nous avons aussi, par hypothèse,

$$X = x_1, \quad Y = \lambda X.$$

En éliminant  $\lambda$  et  $x_1$  entre ces trois équations, on obtient celle du lieu décrit par M, savoir :

$$\begin{aligned} (X + \alpha)(HY^2 + KXY + LX^2) \\ = 2H\alpha Y^2 + (K\alpha - 2H\beta - M)XY - (K\beta + N)X^2, \end{aligned}$$

laquelle représente une cubique unicursale ayant le point double à l'origine O et ayant une asymptote perpendiculaire à l'axe des abscisses (D) et les deux autres parallèles aux asymptotes de la conique.

Considérons maintenant la question réciproque.

Supposons qu'on donne une cubique unicursale ayant le point double à distance finie et rapportons cette cubique à un système de coordonnées orthogonales ayant pour origine le point double et pour axe des ordonnées la parallèle à une asymptote. L'équation de la cubique prend la forme

$$X(H_1 Y^2 + K_1 XY + L_1 X^2) = M_1 X^2 + N_1 XY + P_1 Y^2.$$

Les conditions pour que la cubique que cette équation représente soit identique à celle que représente l'équation précédente sont :

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{H_1} = \frac{K}{H}, \quad \frac{L_1}{H_1} = \frac{L}{H}, \quad \frac{M_1}{H_1} = -\frac{K_1}{H_1}\beta - \frac{N}{H} - \frac{L_1}{H_1}\alpha, \\ \frac{N_1}{H_1} = -2\beta - \frac{M}{H}, \quad \frac{P_1}{H_1} = \alpha. \end{aligned}$$

Les deux premières équations déterminent  $\frac{K}{H}$  et  $\frac{L}{H}$ .  
Les autres et l'équation

$$H\beta^2 + K\alpha\beta + Lx^2 + M\beta + Nx + P = 0$$

ou

$$H\left(\beta^2 + \frac{K_1}{H_1}\alpha\beta + \frac{L_1}{H_1}x^2\right) + M\beta + N\alpha + P = 0,$$

laquelle exprime que le point  $(\alpha, \beta)$  est situé sur la conique, déterminent  $\alpha$  et trois des quantités  $\beta, \frac{M}{H}, \frac{N}{H}, \frac{P}{H}$ , quand une est donnée arbitrairement.

On peut, en particulier, faire  $M = 0$ , et construire ainsi la cubique au moyen d'une conique symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Cette manière de construire les cubiques unicursales est la généralisation d'une méthode employée par Cramer dans l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes* (1750, p. 441) pour construire la courbe connue à présent sous le nom de *conchoïde de Sluse*.

2. Si la conique considérée se réduit à un cercle représenté par l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

la courbe engendrée par la méthode donnée au numéro précédent est une *cubique circulaire unicursale* représentée par l'équation

$$X(X^2 + Y^2) = (2a - \alpha)X^2 - 2(b - \beta)XY + \alpha Y^2.$$

Réciproquement, si l'on donne la cubique circulaire représentée par l'équation

$$X(X^2 + Y^2) = M_1 X^2 + N_1 XY + P_1 Y^2,$$

on a, pour déterminer le cercle et le point  $(\alpha, \beta)$  qui figurent dans la construction considérée, les équations

$$\begin{aligned} 2a - \alpha &= M_1, & 2(b - \beta) &= N_1, & \alpha &= P_1, \\ (a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 &= R^2. \end{aligned}$$

3. Supposons maintenant que le point A ne soit pas

situé sur la conique donnée. Dans ce cas, l'équation (2) donne, en posant  $x = X$ ,  $\lambda = \frac{Y}{X}$ ,

$$\begin{aligned} X^2[HY^2 + KXY + LX^2] \\ + X[(K\beta + N)X^2 + (2\beta H - K\alpha + M)XY - 2H\alpha Y^2] \\ + H\alpha^2 Y^2 - \alpha(2H\beta + M)XY + (H\beta^2 + M\beta + P)X^2 = 0. \end{aligned}$$

La courbe engendrée par M, quand la droite (D<sub>1</sub>) varie, est donc alors une quartique ayant un point double à l'origine des coordonnées, deux asymptotes coïncidentes parallèles à l'axe des ordonnées, dont l'équation est  $X = \alpha$ , et deux autres parallèles à celles de la conique donnée.

Réciproquement, si l'on donne une quartique ayant deux asymptotes réelles coïncidentes situées à distance finie et un point double situé aussi à distance finie, nous pouvons prendre pour axe des ordonnées une parallèle à ces asymptotes et le point double pour origine des coordonnées, et l'équation de la courbe prend la forme

$$\begin{aligned} X^2(H_1 Y^2 + K_1 XY + L_1 X^2) \\ + X(M_1 X^2 + N_1 XY + P_1 Y^2) \\ + Q_1 X^2 + R_1 XY + T_1 Y^2 = 0. \end{aligned}$$

Les conditions pour que cette équation soit identique à celle qui précède sont :

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{H_1} &= \frac{K}{H}, & \frac{L_1}{H_1} &= \frac{L}{H}, & \frac{M_1}{H_1} &= \frac{K_1}{H_1}\beta + \frac{N}{H}, \\ \frac{N_1}{H_1} &= 2\beta + \frac{M}{H} - \frac{K_1}{H_1}\alpha, \\ \frac{P_1}{H_1} &= -2\alpha, & \frac{Q_1}{H_1} &= \beta^2 + \frac{M}{H}\beta + \frac{P}{H}, \\ \frac{R_1}{H_1} &= -2\alpha\beta + \frac{M}{H}\alpha, & \frac{T_1}{H_1} &= \alpha^2. \end{aligned}$$

Ces équations donnent d'abord

$$(A) \quad P_1^2 = 4H_1T_1.$$

Quand cette condition est satisfaite, les deux premières équations déterminent  $\frac{K}{H}$  et  $\frac{L}{H}$ ; les autres déterminent  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\frac{M}{H}$ ,  $\frac{N}{H}$ ,  $\frac{P}{H}$ .

La condition (A) est celle qui exprime que la quartique donnée a deux asymptotes coïncidentes parallèles à l'axe des ordonnées.

De tout ce qui précède résultent les théorèmes suivants :

1° *Le lieu décrit par M, quand la droite (D) varie, est une quartique ayant un point double à O et deux asymptotes coïncidentes perpendiculaires à la droite (D).*

2° *Réciproquement, si l'on donne une quartique ayant un point double et deux asymptotes coïncidentes à distance finie, on peut déterminer une conique telle que la quartique puisse être construite par la méthode exposée ci-dessus.*

4. En généralisant la doctrine précédente, on obtient une transformation de courbes qu'on va voir.

Considérons une courbe (C) représentée par l'équation  $y = \lambda(x)$  et prenons sur son plan un point A ayant pour coordonnées  $(\alpha, \beta)$ , et un point O, origine des coordonnées. Par le point A, menons une droite (D<sub>1</sub>) de direction arbitraire et représentons par  $(x, y)$  les coordonnées d'un point B où elle coupe la courbe donnée. Par ce dernier point, menons une perpendiculaire à l'axe des abscisses et par le point O une parallèle à la droite (D<sub>1</sub>). Ces deux droites se

coupent en un point  $(X, Y)$  qui décrit, quand la direction de la droite  $(D_1)$  varie, une courbe  $(C_1)$  dont les points sont déterminés par les équations

$$X = x, \quad Y = \lambda X = \frac{\gamma - \beta}{x - \alpha} x.$$

Ces équations donnent

$$x = X, \quad y = \beta + Y - \alpha \frac{Y}{X},$$

et par conséquent l'équation de la transformée  $(C_1)$  de la courbe donnée  $(C)$  est

$$(3) \quad \beta + Y - \alpha \frac{X}{Y} = f(X).$$

Si le point  $(\alpha, \beta)$  coïncide avec un point de la courbe donnée, cette équation doit se dédoubler en celle d'une droite et celle de la courbe cherchée.

5. On peut rattacher à la transformation qu'on vient de considérer une autre qu'on va définir.

Considérons une courbe qui se déplace sur un plan de manière que ses points décrivent des droites parallèles et considérons sur ce plan un point  $H$  invariablement lié à la courbe. Prenons sur le même plan un point fixe  $K$  et par ce point traçons la droite  $KH$ . Cette droite coupe la courbe considérée en des points  $M_1, M_2, \dots$  qui décrivent, quand la courbe se déplace, une nouvelle ligne dont on peut obtenir l'équation de la manière suivante.

Prenons pour origine des coordonnées orthogonales le point fixe  $K$  et pour axe des ordonnées une parallèle à la droite décrite par un point de la courbe mobile, et supposons que l'équation de la courbe donnée correspondant à sa position initiale soit  $y = f(x)$ , et que



les coordonnées du point H correspondant à cette position de la courbe soient  $(\alpha_1, \beta_1)$ .

Quand ce point prend la position définie par les coordonnées  $(\alpha_1, \beta_1 + k)$ , la courbe prend la position correspondant à l'équation

$$y - k = f(x).$$

L'équation de la droite HK est

$$\alpha_1 y = (\beta_1 + k) x.$$

Cette droite coupe la courbe en des points déterminés par les deux dernières équations, et l'on obtient l'équation du lieu de ces points en éliminant  $k$  entre ces équations, ce qui donne

$$(4) \quad y - \beta_1 - \alpha \frac{y}{x} = f(x).$$

La transformation qu'on vient de considérer est identique à celle que Descartes a employée dans sa *Géométrie* pour construire au moyen de la parabole sa *conchoïde parabolique*.

Les équations (3) et (4) sont identiques quand on prend  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = -\beta_1$ . Donc, *si l'on applique à une courbe donnée la transformation de Descartes et celle qu'on a considérée au n° 4, on obtient une même courbe, quand on choisit convenablement les points et les droites qui figurent dans ces transformations.*

6. On connaît diverses manières de tracer le *folium de Descartes*, dont nous avons exposé quelques-unes dans notre *Traité des courbes spéciales* (t. I, p. 85-91). Nous allons en ajouter une autre bien facile, qui résulte de la doctrine exposée au n° 1.

En appliquant cette doctrine à l'équation de cette courbe :

$$\sqrt{2} (3Y^2 + X^2) X = 3a (X^2 - Y^2),$$

on trouve, en faisant  $H = 1$ ,  $M = 0$ ,

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} a \sqrt{2}, & \beta &= 0, & L &= \frac{1}{3}, \\ N &= -\frac{1}{3} a \sqrt{2}, & K &= 0. \end{aligned}$$

Donc le folium de Descartes peut être tracé par la méthode considérée au n° 1 en employant la conique définie par l'équation

$$6y^2 + 2x^2 - 2a\sqrt{2}x - 3a^2 = 0,$$

et nous avons pour cela la règle suivante :

Traçons l'ellipse qui a pour centre le point  $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}, 0\right)$ , et dont les axes sont égaux à  $2a\sqrt{2}$  et  $2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Par le sommet de cette ellipse qui a pour coordonnées  $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{2}, 0\right)$ , menons une droite de direction arbitraire  $(D_1)$  et, par le second point où cette droite coupe l'ellipse, traçons une perpendiculaire à l'axe des abscisses. Cette dernière droite coupe la parallèle à  $(D_1)$  menée par l'origine des coordonnées en un point  $M$  du folium.