

A. BUHL

**Sur quelques rapports remarquables
entre volumes**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 269-273

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__269_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[C2k]

**SUR QUELQUES RAPPORTS REMARQUABLES
ENTRE VOLUMES;**

PAR M. A BUHL.

1. Je note ici quelques exercices très simples construits pour les candidats à la Licence. La conservation des volumes et des aires, soit exacte, soit à un facteur constant près, est un problème complètement traité au point de vue général. Ceci n'entraîne point cependant qu'on se désintéresse, par exemple, du théorème concernant la projection plane des aires planes. On trouvera, dans ce qui suit, des théorèmes d'une simplicité analogue et même plus simples à un certain point de vue. Les aires qui se conservent, à un facteur constant près, par projection sur un plan, sont des aires prises sur les surfaces dont le plan tangent fait un angle constant avec un plan fixe, soit le plan Oxy . Elles ont alors pour équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 = \text{const}$$

et sont des hélicoïdes développables. Nous allons passer en revue quelques résultats du même genre, dépendant aussi d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui auront, sur la précédente, l'avantage d'être linéaires.

Dans le même ordre d'idées j'ai donné, dans une seconde Note : *Sur les volumes dus à la rotation d'un contour (Bulletin des Sciences mathématiques, 1916)*, un théorème concernant les volumes tournants engendrés par des contours tracés sur les quadriques ; un tel contour et sa projection sur un plan principal donnent, en tournant autour d'un axe principal situé dans le plan principal considéré, des volumes de révolution en rapport constant. Je n'y reviens que pour signaler que ce théorème doit être naturellement rapproché des suivants, bien qu'on puisse le rattacher à d'autres considérations plus élevées figurant dans des travaux beaucoup plus étendus auxquels on pourra se reporter par l'intermédiaire du *Bulletin*.

2. Soit un cône Γ quelconque, de sommet S , portant sur l'une de ses nappes un contour γ déterminant une cloison A . Soit Π un plan quelconque, sur lequel S se projette en O et A en P . Le cône de sommet O , ayant la base conique A , et le cône de sommet S , ayant la base plane P , ont des volumes égaux.

Rappelons tout d'abord que si l'on considère une cloison A , appartenant à une surface quelconque

$$z = f(x, y),$$

le cône, ayant A pour base gauche et dont le sommet est à l'origine O , a pour volume

$$\frac{1}{3} \int_{\mathbf{p}} (z - px - qy) dx dy.$$

Si $OS = k$, un cône Γ peut être considéré comme défini par l'équation

$$z - px - qy = k$$

qui exprime qu'il s'agit d'une surface dont le plan tangent passe par un point fixe $S(o, o, k)$. Dans ces conditions l'intégrale double précédente prend une forme qui démontre immédiatement le théorème. On pourrait donner à celui-ci des formes diverses. Soit, par exemple, un cylindre à section droite fermée, de génératrices parallèles à OS. Sur des cônes Γ_i divers, il découpe des cloisons Λ_i ; tous les volumes coniques OA_i sont égaux.

3. Passons maintenant à des proportionnalités entre volumes de natures plus différentes. Considérons, par exemple, le problème suivant :

A quelles surfaces doit appartenir une cloison A, se projetant en P sur Oxy, pour que le volume conique OA soit proportionnel au volume engendré par P tournant autour de Ox?

Cette question se traduit immédiatement par l'équation

$$\frac{1}{3} \int \int_{\mathbf{P}} (z - px - qy) dx dy = 2\lambda\pi \int \int_{\mathbf{P}} y dx dy,$$

où λ est le facteur de proportionnalité. Celle-ci entraîne l'équation aux dérivées partielles

$$z - px - qy = 6\pi\lambda y$$

qui exprime que, le plan tangent en un point quelconque M des surfaces cherchées coupant Oz en T, le segment OT est proportionnel à y, seconde coordonnée de M. Par une intégration immédiate, on a pour équation finie desdites surfaces

$$z = 6\pi\lambda y \left[\varphi \left(\frac{y}{x} \right) - \log y \right]$$

La fonction φ est arbitraire.

4. Soit toujours A une cloison appartenant à une surface quelconque; en joignant à l'origine tous les points de A, on définit un cône ayant A pour base gauche et dont je désigne le volume par V_0 . De même, en projetant tous les points de A sur le plan Oxy , parallèlement à Oz , on définit, entre la base gauche A et la base plane P de Oxy , un volume cylindrique U_z . Soit à déterminer les surfaces telles que $\lambda V_0 = U_z$, le coefficient λ étant une constante. L'égalité

$$\frac{\lambda}{3} \int \int_P (z - px - qy) dx dy = \int \int_P z dx dy$$

donne

$$\lambda(z - px - qy) = 3z.$$

Or $z - px - qy$ est l'ordonnée du point T où le plan tangent, en un point quelconque de A, coupe Oz . Les surfaces cherchées ont donc, pour tous leurs points M, un segment OT proportionnel à l'ordonnée z de M. Leur équation finie

$$z^\lambda = x^{\lambda-3} \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

montre d'ailleurs que ce sont des cas particuliers des surfaces de M. Janet (E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2^e édition, p. 433), surfaces riches en propriétés remarquables et déjà rencontrées plusieurs fois dans mes précédentes publications.

Pour $\lambda = 3$ on a les conoïdes droits d'axe Oz ; pour tout contour fermé y tracé, on a $3V_0 = U_z$. Si l'un de ces conoïdes se réduit à un plan parallèle à Oxy , on retrouve le théorème élémentaire sur le volume du cône comparé au volume du cylindre de même base et même hauteur. On voit que ce théorème a une extension simple, immédiate, qui peut d'ailleurs être justifiée sans peine par des considérations purement géométriques.

triques et qui, cependant, n'est pas ordinairement considérée sous un tel jour.

Pour $\lambda = -3$ on a, entre autres surfaces, le cylindre parabolique $2pz = x^2$. En valeur absolue on a encore $3V_0 = U_z$; le changement de signe de λ provient simplement de ce que, pour les conoïdes précédents, les volumes V_0 et U_z étaient d'un même côté de la cloison A, tandis que maintenant ils sont de part et d'autre de cette cloison.

La surface obtenue pour λ quelconque peut aussi, en coordonnées semi-polaires, être représentée par l'équation

$$z^\lambda = r^{\lambda-3} \psi(\theta),$$

d'où des surfaces de révolution pour $\psi(\theta)$ réduit à une constante. En reprenant $\lambda = -3$, on trouve le paraboloides $2pz = r^2$, si bien que la parabole $2pz = x^2$, du plan Oxz , par une translation rectiligne parallèle à Oy ou par rotation autour de Oz , donne, dans les deux cas, des surfaces ayant la même propriété quant aux volumes V_0 et U_z que l'on peut y attacher.