

E.-N. BARISIEN

**Propriétés relatives aux normales abaissées
d'un point d'une ellipse sur cette ellipse**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 258-269

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__258_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L^{15b}]

**PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX NORMALES
ABAISSÉES D'UN POINT D'UNE ELLIPSE SUR CETTE ELLIPSE ;**

PAR E.-N. BARISIEN.

Pour l'homogénéité de cette Note, nous allons donner plusieurs propriétés dont quelques-unes sont connues, et que nous relaterons aussi. Nous donnerons les résul-

tats sans aucune démonstration; ces propriétés se démontrent assez aisément, en général.

NOTATIONS ET ÉQUATIONS. — Soit l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Du point **M** de cette courbe on abaisse les normales **MP**, **MQ**, **MR** et l'on prend **M'** symétrique de **M** par rapport au centre **O** de l'ellipse.

Soient α l'angle d'anomalie excentrique en **M**, et φ l'angle d'anomalie excentrique en **P**.

L'angle α est déterminé en fonction de φ par les formules

$$\cos \alpha = \frac{(c^2 \sin^2 \varphi - b^2) \cos \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \quad \sin \alpha = \frac{(c^2 \cos^2 \varphi - a^2) \sin \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

$$\frac{\sin \varphi (\cos \alpha - \cos \varphi)}{\cos \varphi (\sin \alpha - \sin \varphi)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

On trouve les équations suivantes :

Normale MP :

$$ax \sin \varphi - by \cos \varphi - c^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Droite QR :

$$b^3x \cos \varphi - a^3y \sin \varphi + \frac{a^3b^3}{c^2} = 0.$$

Droite PM' :

$$b^3x \cos \varphi + a^3y \sin \varphi - ab(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) = 0.$$

Cercle PQRM', ou cercle de Joachimsthal relatif au point M :

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2x}{a} \cos \alpha - \frac{a^2y}{b} \sin \alpha - (a^2 + b^2) = 0.$$

Coordonnées du centre C du cercle circonscrit au

(260)

triangle PQR :

$$x_G = \frac{b^2}{2a} \cos \alpha, \quad y_G = \frac{a^2}{2b} \sin \alpha.$$

Coordonnées du centre de gravité G du triangle PQR :

$$x_G = \frac{a(a^2 + b^2)}{3c^2} \cos \alpha, \quad y_G = -\frac{b(a^2 + b^2)}{3c^2} \sin \alpha.$$

Coordonnées de l'orthocentre H du triangle PQR :

$$x_H = \frac{(a^3 + b^3)}{ac^2} \cos \alpha, \quad y_H = -\frac{(a^3 + b^3)}{bc^2} \sin \alpha.$$

Coordonnées du centre ω du cercle des neuf points du triangle PQR :

$$x_\omega = \frac{(2a^3 + b^3 + a^2b^2)}{4ac^2} \cos \alpha,$$
$$y_\omega = -\frac{(a^3 + 2b^3 + a^2b^2)}{4bc^2} \sin \alpha.$$

Droite d'Euler (CGH ω) du triangle PQR :

$$a(3a^3 + 2b^3 - a^2b^2)x \sin \alpha$$
$$+ b(2a^3 + 3b^3 - a^2b^2)y \cos \alpha$$
$$- (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Hauteur du triangle PQR issue de P :

$$a^3x \sin \varphi + b^3y \cos \varphi = (a^3 + b^3) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Médiatrice du triangle PQR relative au côté QR :

$$a^3x \sin \varphi + b^3y \cos \varphi + \frac{a^3b^3 \sin \varphi \cos \varphi}{a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi} = 0.$$

Hyperbole d'Apollonius MPQR :

$$c^2xy - a^3y \cos \alpha + b^3x \sin \alpha = 0.$$

Paraboles passant par M, P, Q, R :

$$c^2(bx \pm ay)^2 + 2ab^4x \sin \alpha - 2a^4by \cos \alpha \pm a^2b^2c^2 = 0.$$

Hyperbole équilatère passant par M', P, Q, R :

$$\begin{aligned} c^2(x^2 - y^2) - \frac{b^2}{a}(a^2 + b^2)x \cos \alpha \\ - \frac{a^2}{b}(a^2 + b^2)y \sin \alpha - (a^4 + b^4) = 0. \end{aligned}$$

Paraboles passant par M', P, Q, R :

$$\begin{aligned} c^2x^2 - ab^2x \cos \alpha - \frac{a^4}{b}y \sin \alpha - a^4 = 0, \\ c^2y^2 + \frac{b^4}{a}x \cos \alpha + a^2by \sin \alpha + b^4 = 0. \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS. — I. *L'enveloppe du cercle PQR est la quartique*

$$a^2b^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = b^6x^2 + a^6y^2.$$

Son équation en coordonnées polaires est

$$r = \frac{1}{2ab} \left[\sqrt{a^6 \sin^2 \theta + b^6 \cos^2 \theta} \pm \sqrt{b^2(2a^2 + b^2)^2 \cos^2 \theta + a^2(a^2 + 2b^2)^2 \sin^2 \theta} \right].$$

Cette quartique se compose de deux ovales. Le plus petit a les mêmes longueurs d'axes que l'ellipse, $2a$ et $2b$. Le plus grand a pour longueurs d'axes

$$\frac{2(a^2 + b^2)}{a} \quad \text{et} \quad \frac{2(a^2 + b^2)}{b}.$$

La somme des aires de ces deux ovales est

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2a^2b^2} (a^2 + b^2)(a^4 + 3a^2b^2 + b^4) \\ &= \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2) + \frac{\pi(a^2 + b^2)^3}{2a^2b^2}. \end{aligned}$$

II. *La puissance du centre O de l'ellipse par rapport au cercle PQR est constante et égale à $-(a^2 + b^2)$.*

III. *Le cercle PQR est bitangent à sa courbe enveloppe.*

Pour le cercle

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2 x}{a} \cos \alpha - \frac{a^2 y}{b} \sin \alpha - (a^2 + b^2) = 0,$$

les deux points de contact sont situés sur la droite

$$b^2 x \sin \alpha - a^2 y \cos \alpha = 0.$$

IV. *Si R est le rayon du cercle PQR, et O' le centre de ce cercle, on a*

$$R^2 = a^2 + b^2 + \overline{OO'}^2.$$

Si $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le rayon du cercle de Monge ou lieu du sommet des angles droits circonscrits à l'ellipse, cette relation devient

$$R^2 = r^2 + \overline{OO'}^2, \quad R^2 - r^2 = \overline{OO'}^2.$$

Il en résulte que : *le cercle PQR coupe le cercle de Monge de l'ellipse donnée suivant un diamètre de ce dernier cercle.*

V. *Les trois côtés du triangle PQR enveloppent l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{c^4}.$$

VI. *Le lieu du centre C du cercle circonscrit au triangle PQR est l'ellipse*

$$a^6 x^2 + b^6 y^2 = \frac{a^4 b^4}{4}.$$

VII. *Le lieu du centre de gravité G du triangle PQR est l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{9c^4}.$$

VIII. *Le lieu de l'orthocentre H du triangle PQR est l'ellipse*

$$a^2 r^2 + b^2 y^2 = \frac{(a^4 + b^4)^2}{c^4}.$$

IX. *Le lieu du centre ω du cercle d'Euler du triangle PQR est l'ellipse*

$$\frac{a^2 r^2}{(a^4 + b^4 - a^2 b^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(a^4 + 2b^4 - a^2 b^2)^2} = \frac{1}{16c^4}.$$

X. *La corde de contact (III) du cercle PQR avec son enveloppe est perpendiculaire à la tangente en C à l'ellipse (VI).*

XI. *Le milieu de chacune des droites MC, MG, MH, M ω décrit une ellipse.*

XII. *Chacune des droites MC, MG, MH, M ω est normale à une ellipse fixe.*

XIII. *La droite d'Euler du triangle PQR est normale à l'ellipse*

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2(3a^4 + 2b^4 - a^2b^2)^2} + \frac{y^2}{b^2(2a^4 + 3b^4 - a^2b^2)^2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2)^2(a^4 + b^4)^2}{c^4[9(a^4 + b^4)^2 - a^2b^2(a^2 + b^2)^2]}. \end{aligned}$$

XIV. *Le lieu du point de rencontre de la droite d'Euler du triangle PQR avec la normale à l'ellipse donnée en M est une ellipse.*

XV. *Le lieu du point de rencontre des droites MP et QR est la sextique unicursale dont les coordonnées*

paramétriques sont

$$x = \frac{a^3(c^4 \sin^2 \varphi + b^4) \cos \varphi}{c^2(a^4 \sin^2 \varphi - b^4 \cos^2 \varphi)}, \quad y = \frac{b^3(c^4 \cos^2 \varphi + a^4) \sin \varphi}{c^2(a^4 \sin^2 \varphi - b^4 \cos^2 \varphi)}.$$

XVI. *Le lieu du point de rencontre des droites PM' et QR est la quartique unicursale dont les coordonnées paramétriques sont*

$$x = \frac{a[c^2(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) - a^2 b^2]}{2b^2 c^2 \cos \varphi},$$

$$y = \frac{b[c^2(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) + a^2 b^2]}{2a^2 c^2 \sin \varphi}.$$

XVII. *La droite PM' enveloppe une sextique unicursale dont les coordonnées paramétriques sont*

$$x = \frac{a}{b^2} [\gamma b^2 - a^2 + c^2 \cos^2 \varphi] \cos \varphi,$$

$$y = \frac{b}{a^2} [\gamma a^2 - b^2 - c^2 \sin^2 \varphi] \sin \varphi.$$

et qui a pour aire

$$U = \frac{\pi(10a^2b^2 - a^4 - b^4)}{8ab}.$$

Si $a = b\sqrt{5} + 2\sqrt{6}$, on a $U = 0$; dans ce cas, la courbe ayant deux points doubles et trois boucles, l'aire de la boucle centrale est équivalente à la somme des aires des deux autres boucles. Les droites QM' et RM' enveloppent la même sextique.

XVIII. *Le lieu des projections de O sur les droites PM', QM', RM' est la sextique unicursale qui a pour équation*

$$(x^2 + y^2)^2(a^6x^2 + b^6y^2) = (a^4x^2 + b^4y^2)^2.$$

L'aire de cette courbe est

$$U = \frac{\pi[a^8 + b^8 + 2a^3b^3(a^2 + b^2 + ab)]}{2(a^3 + b^3)^2}.$$

XIX. *Le lieu des milieux des cordes PM', QM', RM' est la sextique unicursale*

$$(a^2x^2 + b^2y^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^4b^4(x^2 + y^2)^2,$$

dont l'aire est

$$U = \frac{\pi ab(a^4 + b^4 + 6a^2b^2)}{2(a^2 + b^2)^2}.$$

XX. *Le lieu des pôles des cordes PM', QM', RM' par rapport à l'ellipse donnée est la podaire centrale de cette ellipse*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

XXI. *Le lieu du milieu des côtés du triangle PQR est la quartique unicursale*

$$c^4(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^4b^4(a^2x^2 + b^2y^2),$$

dont l'aire est

$$U = \frac{\pi ab(a^4 + b^4)}{2c^4}.$$

XXII. *Les hauteurs du triangle PQR sont normales à l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{(a^4 + b^4)^2}{(a^6 - b^6)^2}.$$

XXIII. *Les médiatrices du triangle PQR enveloppent une courbe unicursale du dixième degré, qui a pour aire*

$$U = \frac{\pi[c^4(a^4 + b^4 + 4a^2b^2) - 3a^4b^4]}{2ab(a^2 + b^2)^2}.$$

XXIV. *Le lieu de la projection de O sur les hauteurs du triangle PQR est la sextique unicursale*

$$(x^2 + y^2)^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2) = (a^4 + b^4)^2 x^2 y^2$$

qui a pour aire

$$U = \frac{\pi(a^4 + b^4)^2}{2(a^3 + b^3)^2}.$$

XXV. *Le lieu du milieu des cordes interceptées par les hauteurs du triangle PQR dans l'ellipse donnée est la sextique unicursale*

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 (b^{10} x^2 + a^{10} y^2) = (a^4 + b^4)^2 a^4 b^4 x^2 y^2.$$

XXVI. *Le lieu du pôle par rapport à l'ellipse donnée des hauteurs du triangle PQR est la kreuz-curve*

$$\frac{a^{10}}{x^2} + \frac{b^{10}}{y^2} = (a^4 + b^4)^2.$$

XXVII. *Le lieu de la projection de O sur les médiatrices du triangle PQR est la courbe unicursale du huitième degré*

$$(x^2 + y^2)^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 = x^2 y^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2),$$

dont l'aire est

$$U = \frac{\pi(a^5 + b^5)}{2(a + b)^3} = \frac{\pi[a^5 + b^5 + a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2)]}{2(a + b)^2}.$$

XXVIII. *Le lieu du milieu des cordes interceptées dans l'ellipse donnée par les médiatrices du triangle PQR est la courbe du huitième degré*

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2)^2 = a^4 b^4 x^2 y^2 (b^{10} x^2 + a^{10} y^2).$$

XXIX. *Le lieu du pôle par rapport à l'ellipse des cordes formées par les médiatrices du triangle*

PQR est la sextique

$$x^2 y^2 (b^{10} x^2 + a^{10} y^2) = (b^6 x^2 + a^6 y^2)^2.$$

XXX. *Le lieu des pieds des hauteurs du triangle PQR est une sextique unicursale.*

XXXI. *Le lieu du milieu des hauteurs du triangle PQR est une sextique unicursale.*

XXXII. *L'hyperbole d'Apollonius MPQR enveloppe la kreuzcurve*

$$c^4 x^2 y^2 = b^6 x^2 + a^6 y^2.$$

Cette kreuzcurve est aussi le lieu des pôles des cordes normales à l'ellipse donnée.

XXXIII. *Le lieu du centre de l'hyperbole d'Apollonius MPQR est l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{c^4},$$

qui est aussi l'enveloppe (V) des côtés du triangle PQR.

XXXIV. *Le lieu des sommets de l'hyperbole d'Apollonius MPQR se compose de deux quartiques*

$$b^6 x^4 + a^6 y^4 = \frac{a^6 b^6 (x + y)^2}{c^4},$$

$$b^6 x^4 + a^6 y^4 = \frac{a^6 b^6 (x - y)^2}{c^4}.$$

XXXV. *Les paraboles passant par M, P, Q, R enveloppent les deux quartiques*

$$c^4 [(bx + ay)^2 - a^2 b^2]^2 = 4 a^2 b^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2),$$

$$c^4 [(bx - ay)^2 + a^2 b^2]^2 = 4 a^2 b^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2).$$

XXXVI. *Les axes des paraboles MPQR sont parallèles aux diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.*

XXXVII. *Le lieu du sommet des paraboles MPQR se compose de deux quartiques.*

XXXVIII. *L'hyperbole équilatère M'PQR enveloppe la quartique*

$$a^2 b^2 [c^2(x^2 - y^2) - (a^4 + b^4)]^2 = (a^2 + b^2)^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2)$$

XXXIX. *Le lieu du centre de l'hyperbole M'PQR est l'ellipse*

$$a^6 x^2 + b^6 y^2 = \frac{a^4 b^4 (a^2 + b^2)^2}{4c^4}.$$

XI. *Le lieu des sommets de l'hyperbole M'PQR se compose de deux quartiques.*

XI.I. *Les paraboles passant par M', P, Q, R enveloppent deux quartiques*

$$\begin{aligned} b^2(c^2 x^2 - a^4)^2 &= a^2(b^6 x^2 + a^6 y^2), \\ a^2(c^2 y^2 + b^4)^2 &= b^2(b^6 x^2 + a^6 y^2). \end{aligned}$$

XI.II. *Le lieu des sommets des paraboles M'PQR se compose des deux quartiques*

$$\begin{aligned} b^6(c^2 x^2 + a^4)^2 &= a^6 y^2 (a^2 b^4 - 4c^4 x^2), \\ a^6(c^2 y^2 - b^4)^2 &= b^6 x^2 (a^4 b^2 - 4c^4 y^2). \end{aligned}$$

XLIII. *Les centres des quatre cercles de Joachimsthal circonscrits aux triangles PQR, MPQ, MQR, MPR, et le milieu de OM sont situés sur l'hyperbole équilatère*

$$xy = \frac{ab \sin \alpha \cos \alpha}{4}.$$

Cette dernière propriété existe si M est un point

(269)

quelconque (α, β) du plan de l'ellipse donnée. L'hyperbole est alors

$$xy = \frac{\alpha\beta}{4}.$$