PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1917

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 253-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__253_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1917.

Solution de la composition de Géométrie analytique [1].

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

I. Les coordonnées du point M sont

$$x = a, \qquad y = z = \mu,$$

μ étant variable.

L'équation de la sphère de centre I et de rayon IM est

$$x^2 + y^2 + (z - \mu)^2 = a^2 + \mu^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\mu z = a^2.$$

L'équation du plan mené par Oz et M est

$$\frac{y}{x} = \frac{\mu}{a}.$$

Éliminant μ entre les deux dernières équations, on a l'équation de la surface Σ

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)x - 2ayz = 0.$$

Cette équation définit une surface du troisième ordre rencontrée par le plan de l'∞ suivant l'ombilicale et la droite à l'∞ du plan Oyz.

[1] *Voir* l'énoncé ci-dessus, p. 249.

II. Si nous coupons la surface par le plan $z = h$, nous obtenons, pour la projection de la section sur le plan Oxy, l'équation

$$(2) \qquad x(x^2+y^2) + (h^2 - a^2)x - 2ahy = 0,$$

qui définit une cubique circulaire Γ admettant l'origine O à la fois pour point et pour centre, et l'axe Oy pour asymptote.

Remarquons d'ailleurs que l'équation ne change pas si l'on remplace simultanément x par $-x$ et h par $-h$. Il en résulte que les cubiques Γ correspondant à deux plans de section symétriques par rapport au plan Oxy sont elles-mêmes symétriques par rapport à Oy, ce qui permet de limiter la discussion aux valeurs positives de h.

L'allure générale de la courbe résulte sans ambiguïté de la connaissance des trois éléments suivants :

1° Tangente TT' à l'origine $y = \dfrac{h^2 - a^2}{2ah} x$, dont le coefficient angulaire est

$$\left.\begin{matrix}\text{négatif}\\ \text{nul}\\ \text{positif}\end{matrix}\right\} \quad \text{suivant que} \quad \left\{\begin{matrix} h < a\\ h = a\\ h > a\end{matrix}\right\}.$$

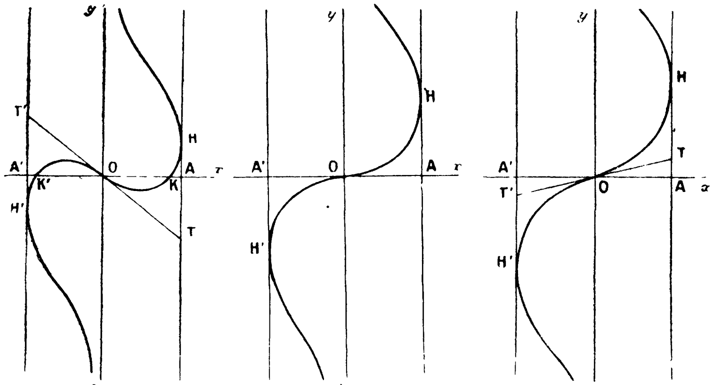
2° Points de rencontre K, K', avec Ox, donnés par $x = \pm\sqrt{a^2 - h^2}$, donc réels si $h < a$, et confondus avec O si $h = a$.

3° Points de contact H, H', avec les droites $x = a$ et $x = -a$, donnés respectivement par $y = h$ et $y = -h$.

D'où les trois formes représentées.

Pour $h = 0$, la cubique se décompose en le cercle de centre O et de rayon OA, et l'axe Oy.

La détermination des points H et H' est immédiate, puisque $AH = A'H' = h$. Remarquons qu'on en déduit très facilement les points K et K' et la tangente TT'. En effet, l'expression de l'abscisse des points K



$h < a$ $h = a$ $h > a$

et K' (2°) montre que ces points sont sur le cercle de centre O qui passe par les points communs au cercle de diamètre OA et au cercle de centre A et de rayon AH. D'autre part, d'après l'équation de la tangente à l'origine, on a $AT = \frac{h^2 - a^2}{2h}$. On en déduit immédiatement que $OT = TH = \frac{a^2 + h^2}{2h}$ et, par suite, que le point T est sur la perpendiculaire élevée au segment de droite OH en son milieu.

Remarquons aussi que l'enveloppe des sections considérées, en projection sur Oxy, se composant des droites $x = a$ et $x = -a$, ces deux droites constituent le contour apparent de la surface sur Oxy. Toute la partie réelle de la surface se trouve donc comprise entre les plans $x = a$ et $x = -a$, qui la touchent suivant des droites respectivement contenues dans les plans $y - z = 0$ et $z + y = 0$, droites qui sont symétriques par rapport à Oz. Il suit de là que toute droite réelle située sur la surface est nécessairement contenue dans un plan parallèle à Ozy.

III. D'après la remarque qui termine le n° I, tout plan mené par une droite réelle de Σ (mais non par la droite à l'∞ de Oyz) coupe cette surface suivant une conique qui passe par les ombilics de ce plan, c'est-à-dire suivant un cercle. Puisque, d'après la remarque qui termine le n° II, une telle droite se trouve nécessairement dans un plan parallèle au plan Oyz, formons la section de Σ par le plan $x = k$; cette section se projette sur Oyz suivant l'hyperbole

$$ky^2 - 2ayz + kz^2 + k(k^2 - a^2) = 0,$$

qui ne dégénère en un système de droites que pour $k = 0$, ce qui donne les axes Oy et Oz, et pour $k = \pm a$, ce qui donne la droite D de la définition et sa symétrique D′ par rapport à Oz.

Les plans sécants menés par Oz donnent un premier système de cercles qui sont ceux de la définition.

Les plans par Oy en donnent un second qui se définissent comme les premiers avec simple remplacement de l'axe Oy par l'axe Oz, ce qui était bien évident *a priori* puisque, dans l'équation (1), on peut permuter les variables y et z.

Considérons maintenant les plans passant par D

$$y - z = \lambda(x - a). \tag{6}$$

Puisqu'ils coupent Σ suivant des cercles, on doit pouvoir, par combinaison de (1) et (6), obtenir une sphère. Or (1) peut s'écrire

$$(x - a)(x^2 + y^2 + z^2 + ax) + a(y - z)^2 = 0.$$

En y remplaçant $y - z$ par sa valeur (6), on a

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + (1 + \lambda^2)ax - \lambda^2 a^2 = 0.$$

Les cercles donnés, pour chaque valeur de λ, par l'intersection des sphères (7) par les plans (6), appartiennent donc à Σ.

De même pour ceux situés dans les plans passant par D', obtenus par le même calcul que ci-dessus avec simple remplacement de $y - z$ et de $x - a$ respectivement par $y + z$ et $x + a$.

Voyons maintenant comment peut être défini géométriquement chaque cercle donné par l'intersection de (6) et (7), que nous appellerons *cercle* (λ), commun au plan (λ) et à la sphère (λ) d'équations respectives (6) et (7).

Remarquons d'abord que sur chaque sphère (λ) il y a deux cercles (λ) donnés par les deux plans (λ) correspondant à la même valeur de λ prise positivement ou négativement.

Il suffit de faire $x = y = 0$ dans (6) et (7) pour voir d'abord que les plans des deux cercles passent par les points où la sphère est coupée par Oz. Donc, *une sphère* (λ) *étant obtenue, il suffit de prendre les deux plans menés par ses points d'intersection avec* Oz *et la droite* D, *pour obtenir sur cette sphère les deux cercles* (λ) *qui lui appartiennent.*

Reste à définir géométriquement une sphère (λ). Il suffit de jeter les yeux sur (7) pour voir que :

1° Cette sphère a son centre sur Ox;

2° Elle coupe le plan $x = a$ suivant un cercle imaginaire *fixe* dont la projection sur Oyz est

$$y^2 + z^2 + 2a^2 = 0.$$

Autrement dit, toutes les sphères (λ) ont un plan radical commun. Le cercle suivant lequel elles le coupent est imaginaire; mais il existera une sphère Ω concentrique à ce cercle, c'est-à-dire de centre $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ (point de rencontre A de la droite D et de Ox) qui sera orthogonale à toutes les sphères (λ).

Pour obtenir cette sphère orthogonale commune, il suffit de construire l'une quelconque des sphères (λ), par exemple, celle qui correspond à $\lambda = 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax = 0,$$

qui est celle qui a pour diamètre OA′, A′ étant le symétrique de A par rapport à O. Il suffit, de A comme centre, de décrire une sphère orthogonale à celle-ci : c'est la sphère Ω. *Pour avoir une sphère* (λ) *quelconque, il n'y a plus qu'à décrire, d'un point quelconque de* Ox *comme centre, une sphère orthogonale à la sphère fixe* Ω.

Pour le quatrième système de cercles, donné par D′, même construction que la précédente en intervertissant simplement les rôles des points A et A′.