Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 186-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__186_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1920 et 2257.

(1901, p. 48; 1915, p. 432.)

1920 [1]. *Le produit du rayon de courbure en un point d'une hyperbole par la distance du centre à la tangente correspondante est égal, en valeur absolue, au carré du segment de la tangente compris entre le point de contact et l'une des asymptotes.* M. D'OCAGNE.

[1] *Voir* une précédente solution (1915, p. 475).

2257. *Si, dans une hyperbole, la tangente au point* M *coupe une des asymptotes au point* T *et que le centre* O *se projette orthogonalement en* I *sur la normale en* M, *la perpendiculaire élevée en* T *à* IT *passe par le centre de courbure répondant au point* M. *Démontrer géométriquement ce théorème obtenu à titre d'application des coordonnées parallèles* (*Nouvelles Annales*, 1902, p. 232).

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par un ABONNÉ.

Soit b' la longueur du segment de tangente compris entre le point de contact et une asymptote. D'après un théorème classique b' est égal au demi-diamètre conjugué qui lui est parallèle.

D'autre part on a pour le rayon de courbure d'une conique à centre l'expression

$$\rho = \frac{b'^2}{p},$$

où p désigne la distance du centre à la tangente correspondante. Cette formule est susceptible d'une démonstration géométrique (*Voir* SALMON, *Sections coniques*, 2e édition, p. 642). Elle résout la question 1920.

Pour la question 2257, appelons C le point où la perpendiculaire élevée en T à IT coupe la normale. Le triangle rectangle ITC donne

$$MT^2 = MI \times MC.$$

Mais $MT = b'$ et $IM = p$, donc $MC = \rho$.

C. Q. F. D.

Voir plus loin (p. 197), une autre solution de la question 2257.

2249.

(191., p. 288).

En chaque point d'une courbe donnée on mène la tangente et l'on prend sur cette tangente une longueur MT *égale au rayon de courbure de la courbe en* M, *on demande de construire la tangente et le centre de courbure de la courbe, lieu du point* T, *quand* M *décrit la courbe donnée.*

F. BALITRAND.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Soient

$$T = \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$
$$N = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0$$

la tangente et la normale à la courbe considérée en M: les coordonnées du point T seront

$$N = p + p'',$$
$$T = 0;$$

le coefficient angulaire de la normale tangente en ce point sera

$$-\frac{dT}{dN - (p' + p''')} = + \frac{p + p''}{(p + p'') + (p' + p''')};$$

si donc on prend sur la droite $\overline{MC_1}$, C_1 étant le centre de courbure de la courbe donnée en M, un segment $\overline{MK}$ égal à la somme des rayons de courbure de la courbe et de sa développée, KT sera la normale à la courbe lieu de T. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure, $p + p''$, $p' + p'''$. La droite KT a pour équation

$$\frac{-T}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{N}{\rho_1} = 1;$$

elle touchera son enveloppe en son point d'intersection avec la droite

$$\frac{\rho_2 + \rho_3}{\rho_1 + \rho_2}\left[\frac{T}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{N}{\rho_2 + \rho_3}\right] - \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[\frac{N}{\rho_1} + \frac{T}{\rho_2}\right] - 1 = 0,$$

ρ_3 étant le rayon de courbure de la seconde développée de la courbe (M).

D'où la construction suivante : Prenons sur la droite $\overline{TM}$ le segment $\overline{MB} = \rho_2 + \rho_3$, la perpendiculaire en B à MT coupe la perpendiculaire à MK en K en D, prenons sur $\overline{C_1 M}$ un segment $\overline{MA} = \rho_2$, la parallèle à AT menée par C_1 coupe MD en I. La parallèle menée par B à MD et la parallèle menée par M à AT se coupent en I'. La droite II' coupe KT au centre de courbure de la courbe, lieu de T.

Autre solution par l'AUTEUR.

2250.

(1915, p. 288.)

Étant donnés une courbe plane (M) *et un point fixe* O *de son plan, de chaque point* M *de* (M) *avec* MO *pour rayon, on décrit un cercle qui coupe en* P *et* Q *la tangente et la normale en* M *à la courbe* (M). *Trouver :* 1° *le point où la droite* PQ *touche son enveloppe;* 2° *le centre de courbure de cette enveloppe.* F. BALITRAND.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Soient

$$T = \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$
$$N = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0.$$

Prenons le point O pour origine, pour axes la tangente et la normale en M à (M). Supposons par exemple que, C_1 étant le centre de courbure de (M) en M, nous portions les segments $\overline{MP}$ et $\overline{MQ}$ égaux à OM dans la direction $\overline{C_1M}$ et dans la direction faisant avec celle-ci l'angle $+\frac{\pi}{2}$; l'équation de PQ sera

$$N + T = \sqrt{p^2 + p'^2};$$

si nous désignons par ρ_1 le rayon de courbure MC_1, cette droite touchera son enveloppe en son point d'intersection avec la droite

$$N - T = \rho_1\left(1 + \frac{p'}{\sqrt{p^2+p'^2}}\right) = \rho_1\left[1 + \sin\widehat{OMC_1}\right];$$

cette dernière droite est la perpendiculaire abaissée sur PQ du point A de la normale, tel que le segment

$$\overline{MA} = \rho_1\left[1 + \sin\widehat{OMC_1}\right],$$

ce segment étant porté dans la direction $\overline{MC_1}$.

La normale

$$N - T = \rho_1\left[1 + \sin\widehat{OMC_1}\right]$$

à l'enveloppe de PQ touche son enveloppe en son point d'intersection avec la droite

$$T + N = -\left[\rho_1 + \rho_2 + \rho_2 \frac{p'}{\sqrt{p^2 + p'^2}} + \rho_1 \frac{p''}{\sqrt{p^2 + p'^2}} - \frac{p'^2 \rho_1^2}{(p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

en désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure de (M) et de sa développée en M. Cette droite est la parallèle à PQ menée par le point A′ de la normale en M à (M) tel que le segment $\overline{MA'}$ porté dans le sens $\overline{MC_1}$ soit égal à

$$\overline{MA'} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_2 \sin\widehat{OMC_1} + \rho_1 \sin\widehat{OMC'_1} - \frac{\rho_1^2 \sin^2\theta}{QM},$$

C'_1 étant l'un des points du cercle de diamètre OM, tel que OC'_1 soit égale à la distance de O ou la parallèle à la tangente à (M) en (M) menée par C_1. Cette expression de MA′ se construit immédiatement.

Autre solution par l'AUTEUR.

2253.

(1913, p. 431.)

Trouver les courbes planes telles que la projection, sur une droite de leur plan, d'une corde quelconque soit proportionnelle au segment, déterminé sur cette droite, par les deux normales à la courbe aux deux extrémités de la corde. F. BALITRAND.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Prenons la droite donnée comme axe des x, nous aurons pour un point quelconque de la courbe

$$\frac{x + yy'}{x} = K,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$x^2(K - 1) + y^2 = C.$$

Les courbes cherchées sont donc les coniques admettant pour axe la droite donnée.

Autres solutions par M. T. ONO et par l'AUTEUR.

2254.

(1915, p. 431.)

Soient O *le pôle et* Δ *l'asymptote d'une conchoïde de Nicomède (définie par la condition que si le vecteur* OM *coupe la droite* Δ *en* A, *le segment* MA *soit de longueur constante). On sait que la normale à la conchoïde en* M *passe par le point de rencontre* N *des perpendiculaires élevées en* O *à* OA *et en* A *à* Δ.

Cela posé, U *étant le milieu de* NA *et* V *le symétrique de* U *par rapport à* N, *si l'on mène par* U *et par* V *des parallèles respectivement à* OA *et à* Δ, *qui se coupent en* I *et qu'on élève en* N *à* MN *une perpendiculaire qui coupe* OM *en* K, *la droite* KI *passe par le centre de courbure* μ *correspondant au point* M *de la conchoïde.* M. D'OCAGNE.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Menons par N une perpendiculaire à NA et par I une parallèle à NA, rencontrant cette perpendiculaire en K, et la droite ON en T; soit S l'intersection de IK avec NO.

Nous avons dans les triangles OK_1T, NOM :

$$\frac{KO}{KK_1}\frac{IK_1}{IT}\frac{ST}{SO}=1, \qquad \frac{SO}{SN}\frac{\mu N}{\mu M}\frac{KM}{KO}=1,$$

d'où

$$\frac{ST}{SO}=\frac{KK_1}{KO}\frac{IT}{IK_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu M}{\mu N}=\frac{SO}{SN}\frac{KM}{KO};$$

posons, pour abréger l'écriture,

$$OA=d, \qquad AM=l, \qquad ON=a,$$

nous aurons

$$\frac{KK_1}{KO}=\frac{AM}{OA}=\frac{l}{d},$$

$$\frac{IT}{IK_1}=1+\frac{K_1T}{IK_1}=1+\frac{2OK_1}{OA}=1+\frac{2\overline{ON}^2}{\overline{OA}^2}=1+\frac{2a^2}{d^2},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OS}} = \frac{l(2a^2+d^2)+d^3}{d^3};$$

or

$$\mathrm{OT} = \frac{a^3}{d^2},$$

d'où

$$\mathrm{OS} = \frac{a^3 d}{l(2a^2+d^2)+d^3},$$

d'où

$$\frac{\mu\mathrm{M}}{\mu\mathrm{N}} = \frac{d[a^2+(d+l)^2]}{l(2a^2+d^2)+ad(a^2+d^2)},$$

d'où enfin

$$\mu\mathrm{M} = \frac{d}{l}\,\frac{[a^2+(d+l)^2]^{\frac{3}{2}}}{d(d+l)-2a^2}.$$

Or, si nous désignons par O_1 le symétrique de O par rapport à N, le cercle $\mathrm{NO}_1\mathrm{A}$ est évidemment le cercle des inflexions, relatif à la position considérée du segment invariable mobile AM; ce cercle coupe la normale NM en M_1 et en désignant par ρ le rayon de courbure de la conchoïde en M, nous aurons $\rho = \frac{\overline{\mathrm{NM}}^2}{\mathrm{MM}_1}$; or on a, en désignant par A′ l'intersection du cercle des inflexions avec OM_1,

$$\mathrm{ON}.\mathrm{OO}_1 = 2a^2 = \mathrm{OA}.\mathrm{OA}', \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{OA}' = \frac{2a^2}{d}$$

et

$$\mathrm{MM}_1.\mathrm{MN} = \mathrm{MA}.\mathrm{MA}', \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{MM}_1 = \frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MA}'}{\mathrm{MN}}$$

et

$$\rho = \frac{\overline{\mathrm{MN}}^3}{\mathrm{MA}.\mathrm{MA}'} = \frac{d}{l}\,\frac{[a^2+(d+l)^2]^{\frac{3}{2}}}{d(d+l)-2a^2}.$$

Le point μ est donc bien le centre de courbure répondant au point M.

Autre solution par un Abonné.

2255.

(1915, p. 431.)

Étant données dans l'espace deux droites quelconques D *et* D′ *ne se rencontrant pas, on considère sur* D *un point* *fixe* A *et sur* D′ *un point variable* B *d'où l'on abaisse sur* D *la perpendiculaire* BC. *Soit* E *l'ellipse dont* CA *et* CB *sont deux demi-axes. On demande de démontrer que :*

1° *La surface engendrée par l'ellipse* E *est un conoïde* Γ *dont on déterminera la directrice rectiligne et le plan directeur.*

2° *La section du conoïde* Γ *par tout plan parallèle à* D *est une cissoïde d'ellipse dont on déterminera les trois éléments de définition (ellipse, pôle et droite). On examinera à quelles conditions cette section peut devenir une cissoïde de cercle.*

Nota. — *On rappelle qu'une cissoïde d'ellipse, pour un pôle* O *situé sur cette ellipse, est une courbe lieu d'un point* M *tel que, si* OM *coupe l'ellipse en* M′ *et une certaine droite fixe en* M″, *on ait, en tenant compte du sens,* OM = M′M″.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient π le plan mené par D parallèlement à D′, Ax la droite menée par A perpendiculairement à D dans ce plan, Ay la perpendiculaire en A au plan DAx, α l'intersection de D′ avec Axy, B_1 son intersection avec DAy. La surface Γ contient visiblement les droites D et D′; étant de plus coupée par un plan passant par D suivant une ellipse (E), elle est du troisième ordre. Lorsque le point variable B vient en α, l'ellipse correspondante ($E\alpha$) devient la droite double Aα; lorsque B est à l'infini sur B′, l'ellipse correspondante ($E\infty$) se décompose en la droite de l'infini du plan π et en la droite D. Un plan quelconque parallèle au plan π et rencontrant la génératrice double Aα en M coupera donc Γ suivant deux droites se coupant en M, qu'il est d'ailleurs facile de construire. Le plan DAy coupe la surface suivant une ellipse ayant pour demi-axes C_1A, C_1B_1, C_1 et B_1 étant les pieds de la perpendiculaire commune à D et D′; soit (E_1) cette ellipse, la trace du plan mené par M parallèlement à π coupe Ay en P, la parallèle à D menée par P coupe (E_1) en u et v, les droites Mu et Mv sont les deux génératrices de Γ situées dans le plan considéré. En résumé, Γ est un conoïde du troisième ordre dont Aα est la directrice rectiligne, π le plan directeur et que l'ellipse E_1 achève de définir complètement. Ainsi défini on voit aisément qu'il contient Ax, que le plan parallèle à π mené par D lui est tangent le long de cette droite, et que le plan symétrique de celui-ci, par rapport à π, lui est aussi tangent le long d'une droite dont la projection sur le plan π est symétrique de la projection de D sur ce même plan.

2° Déterminons la section du conoïde Γ par un plan parallèle à D, dont la trace sur Axy coupe $A\alpha$ en R, $A\alpha$ en K, Ay en S. Considérons un plan parallèle à π dont la trace sur Axy rencontre $A\alpha$ en M, Ay en P, RKS en P'; soit u l'un des points d'intersection de la parallèle à D menée par P avec (E'), soit u' l'intersection de la génératrice Mu avec le plan sécant RKS, nous aurons

$$\frac{Pu}{P'u'} = \frac{MP}{MP'} = \frac{AP}{KP'}\,\frac{KR\tang\theta}{AR}, \qquad \text{en posant} \qquad \widehat{\alpha A y} = \theta;$$

nous avons de même

$$\frac{KP'}{KR} = \frac{KM}{AK} = \frac{AM - AK}{AK} = \frac{AP}{AK\cos\theta} - 1;$$

nous avons de plus, puisque le point u est sur l'ellipse (E_1), en posant $B_1C_1 = d$ et en désignant par h et φ la distance de α à Ay et l'angle de D' avec Axy,

$$\frac{\overline{AP}^2}{d^2} + \frac{\overline{Pu}^2}{h^2\tang^2\varphi} + \frac{2Pu}{h\tang\varphi} = 0,$$

d'où l'on déduit, en posant $KP' = y$, $Pu' = z$ et en observant que $\tang\theta = \frac{h}{d}$,

$$AK(y + KR)\left[\frac{y^2}{\overline{KR}^2} + \frac{z^2}{\overline{AR}^2\tang^2\varphi}\right] + \frac{2hy^2}{AR\sin\theta\tang\varphi} = 0,$$

ou, en posant $y = \rho\cos\omega$, $z = \rho\sin\omega$,

$$\rho + \frac{KR}{\cos\omega} + \frac{2\overline{KR}^2.AR.h\tang\varphi}{AK\sin\theta} \times \frac{\sin\omega}{\overline{AR}^2\tang^2\varphi\cos^2\omega + \overline{KR}^2\sin^2\omega} = 0,$$

équation d'une cissoïde d'ellipse ayant pour pôle le point K, pour droite l'intersection du plan sécant et du plan DAx, et pour ellipse l'ellipse

$$\frac{y^2}{\overline{KR}^2}+\frac{z^2}{\overline{AR}^2\operatorname{tang}^2\varphi}+\frac{2hz}{AR.AK\operatorname{tang}\varphi\sin\theta}=0.$$

Si $\overline{KR}^2=\overline{AR}^2\operatorname{tang}^2\varphi$, cette ellipse sera un cercle et la section une cissoïde de cercle, et les plans sécants correspondants resteront parallèles à un plan fixe.

2256.

(1915, p. 432)

Si C *est le centre de courbure répondant à un point* P *d'une hyperbole équilatère de centre* O *et si* P′ *et* P″ *sont les pieds des deux autres normales menées de* C *à l'hyperbole, la corde* P′P″ *est : 1° parallèle à la normale* PC; *2° vue de* P *sous un angle droit; 3° égale à* OC. *Après avoir démontré ces théorèmes, on en déduira une construction des points* P′ *et* P″ *lorsque* P *et par suite* C *est donné.*

M. d'Ocagne.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

L'hyperbole d'Apollonius de C passant par les projections C_1 et C_2 de C sur les asymptotes de l'hyperbole considérée, par O et par C, aura pour centre le milieu ω de OC, cette hyperbole devant de plus être tangente à l'hyperbole donnée en P, la tangente à cette dernière en P et le diamètre Pω seront également inclinés sur les asymptotes de l'hyperbole donnée, Pω et OP sont deux rectangulaires. Si donc P_2 est le symétrique de O par rapport à OP, la perpendiculaire élevée en P_2 à OP coupe la normale PC en PC.

Soit P_1 le symétrique de P par rapport à O, les quatre points P, P_1, P′, P″ sont sur un même cercle, P′P″ et OP sont également inclinés sur les asymptotes de l'hyperbole donnée, P′P″ et PC sont donc parallèles et le triangle PP′P″ inscrit dans une hyperbole équilatère tangente en P à la hauteur PA de ce triangle est rectangle en P.

La perpendiculaire à OP en O et la perpendiculaire à Pω en ω sont les diamètres de la direction P′P″ dans l'hyperbole donnée et dans l'hyperbole d'Apollonius de C; ces deux droites se coupent en I et nous avons

$$\mathrm{PI} = \frac{\mathrm{P'P''}}{2} = \mathrm{O}\omega = \frac{\mathrm{OC}}{2}.$$

En résumé, P_2 étant le symétrique de P par rapport à O, la perpendiculaire à OP en P_2 coupe la normale en P_1 au point C, ω étant le milieu de OC; les perpendiculaires à OP en O, à $P\omega$ en ω, se coupent en I; la parallèle à PC menée par I coupe le cercle de centre I et de rayon PI en P' et P''.

Autres solutions par MM. EGAN, J. LEMAIRE et T. ONO.

AUTRE SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Si l'on observe que IT est le demi-diamètre conjugué de OM, la proposition à démontrer revient à la suivante :

Soient OM *et* OM' *un couple de diamètres conjugués d'une conique de centre* O, *le diamètre* OM' *est moyen proportionnel entre le rayon de courbure en* M *et la distance du centre à la tangente en* M.

Considérons en effet un cercle tangent à la conique en M et passant par un point A de cette conique; soit α le point où la parallèle à OM menée par A rencontre la tangente en M, soit A' le second point d'intersection de ce cercle avec $A\alpha$; nous aurons

$$\overline{M\alpha}^2 = \alpha A . \alpha A';$$

nous aurons de même, en supposant que la conique considérée soit par exemple une ellipse,

$$\frac{\overline{M\alpha}^2}{\overline{OM'}^2} = \frac{(2\,OM - A\alpha)\,A\alpha}{\overline{OM}^2}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\alpha A'}{\overline{OM'}^2} = \frac{2\,OM - A\alpha}{\overline{OM}^2};$$

si $A\alpha$ tend vers zéro, le cercle devient osculateur en M et l'on a, en désignant par A_1 son point d'intersection avec MO,

$$\frac{OA_1 . OM}{2} = \overline{OM'}^2,$$

ou, en désignant par ρ le rayon de courbure et d la distance de O à la tangente en M,

$$\overline{OM'}^2 = \rho\, d.$$

Remarque. — On voit facilement que l'énoncé de M. d'Ocagne peut se mettre sous la forme suivante :

Le cercle passant par l'intersection des asymptotes d'une hyperbole avec la tangente en un point M *de cette courbe et l'antiparallèle à cette tangente, par rapport aux asymptotes, menée par* M, *a pour centre le centre de courbure en* M.

Proposition due à Paul Serret (Géométrie de direction).

Autre solution par M. J. LEMAIRE.

2257.

(1915, p. 432.)

Si, dans une hyperbole, la tangente au point M *coupe une des asymptotes au point* T *et que le centre* O *se projette orthogonalement en* I *sur la normale en* M, *la perpendiculaire élevée en* T *à* IT *passe par le centre de courbure répondant au point* M.

Démontrer géométriquement ce théorème obtenu à titre d'application des coordonnées parallèles (*N. A.*, 1902, p. 232).

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

Si la tangente MT rencontre la seconde asymptote au point T′, le point M étant le milieu de TT′, on sait, d'après Mannheim, que si les perpendiculaires élevées aux asymptotes OT et OT′ par les points T et T′ coupent la normale en M aux points t et t', le centre de courbure m est le milieu de tt' (1).

(1) Le lecteur est prié de faire la figure dans l'hypothèse où les points t et t' sont d'un même côté par rapport au point M. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait écrire $\mathrm{M}m = \dfrac{\mathrm{M}t' - \mathrm{M}t}{2}$. Mais on aurait alors $\dfrac{\mathrm{HT'} - \mathrm{HT}}{2} = \mathrm{TM}$ et le résultat resterait le même.

On a donc

$$Mm = \frac{Mt + Mt'}{2}.$$

Abaissons du centre O la perpendiculaire OH sur la tangente TT'. Les triangles rectangles OTH et OT'H respectivement semblables à TtM et $T't'M$ donnent

$$\frac{OH}{HT} = \frac{TM}{Mt}, \qquad \frac{OH}{HT'} = \frac{T'M}{Mt'},$$

d'où, puisque $T'M = TM$,

$$\frac{Mt + Mt'}{2} = \frac{TM(HT + HT')}{2OH} = \frac{\overline{TM}^2}{OH},$$

ou enfin, si OI est la perpendiculaire abaissée de O sur la normale Mm,

$$Mm = \frac{\overline{TM}^2}{IM},$$

ce qui prouve que le triangle ITm est rectangle en T.

C. Q. F. D.