Nouvelles annales de mathématiques

Joseph Joffroy

Seconde note sur le problème de Pappus généralisé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 177-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__177_1>

[K'1]

SECONDE NOTE SUR LE PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,

Professeur honoraire.

Pour l'intelligence des courtes observations qui suivent, il est nécessaire de se reporter à l'article publié par moi, en avril 1916 (p. 168-171), et à la figure qui l'accompagne.

En supposant droit l'angle $XOY = \omega$ et cherchant $OS = x$ qui déterminera la droite $SS_1 = l$ inscrite dans l'angle et passant par le point P de la bissectrice dont les coordonnées sont $OA = a$, $OB = a$, on obtient

$$(E_1) \qquad x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - l^2)x^2 + 2al^2x - a^2l^2 = 0.$$

Dans les Traités d'Algèbre on déclare que l'équation (E_1) ne peut pas être résolue par des expressions calculables, et l'on cherche une inconnue autre que OS. Je vais prouver que, en résolvant (E_1) par la méthode générale connue, on obtient ses racines sous une forme permettant de les calculer et de les construire.

Pour résoudre

$$\text{(F)} \qquad X^4 + AX^2 + BX + C = 0,$$

on a (*voir* l'Algèbre de Briot)

$$X^2 + pX + q = 0, \qquad X^2 - pX + A + p^2 - q = 0,$$
$$q = \frac{p(A + p^2) - B}{2p}, \qquad p^2 = z,$$
$$z^3 + 2Az^2 + (A^2 - 4c)z - B^2 = 0.$$

D'abord je mets (E_1) sous la forme (F) en remplaçant x par $X + h = X + \frac{a}{2}$; elle devient

$$X^4 + \frac{a^2 - 2l^2}{2} X^2 + a(a^2 + l^2)X + \frac{5a^4 - 4a^2l^2}{16} = 0,$$

et l'équation en z devient

$$z^3 + (a^2 - 2l^2)z^2 + (l^4 - a^4)z - a^2(a^2 + l^2)^2 = 0.$$

Le produit de ses racines étant $a^2(a^2 + l^2)^2$, j'ai l'idée de mettre à la place de z le facteur $a^2 + l^2$, et je constate que l'équation est satisfaite. La somme des deux autres racines est

$$2l^2 - a^2 - (a^2 + l^2) = l^2 - 2a^2;$$

leur produit est

$$\frac{a^2(a^2 + l^2)^2}{a^2 + l^2} = a^2(a^2 + l^2);$$

elles valent donc

$$\frac{l^2 - 2a^2 \pm \sqrt{l^4 - 8a^2l^2}}{2}.$$

Pour $z = a^2 + l^2$, j'ai

$$p^2 = z, \qquad p = \pm\sqrt{a^2 + l^2}.$$

Je suppose $p = +\sqrt{a^2 + l^2}$; q est alors déterminé, et je résous les équations

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 - px + A + p^2 - q = 0$$

dont les racines X sont celles de (E_2).

Celles de E_1 sont donc

$$x = X + \frac{a}{2}.$$

Théorème relatif au problème tout à fait général. — Le point P quelconque dans l'angle $XOY = \omega$ a pour coordonnées $OA = a$, $OB = b$; $SS' = l$ est la droite qu'il faut inscrire.

Je cherche $AS = x$, $BS_1 = y$:

La figure donne

$$\frac{y+b}{b} = \frac{x+a}{x},$$

$$(y+b)^2 + (x+a)^2 - 2(x+a)(y+b)\cos\omega = l^2.$$

Éliminant y, j'obtiens

$$(\mathrm{J}) \quad x^4 + 2(a - b\cos\omega)x^3 + (a^2 + b^2 - 4ab\cos\omega - l^2)x^2 + 2ab(b - a\cos\omega)x + a^2b^2 = 0.$$

Soient S, S′, S″, S‴ les points des quatre droites l (inscriptibles dans XOY) situées sur OX : les valeurs de x, racines de (J), sont celles de $+AS$, $+AS'$, $-AS''$, $-AS'''$: leur produit vaut a^2b^2, dernier terme de (J), il ne change donc pas quand l change, ni la somme des produits de trois de ces longueurs, laquelle vaut $-2ab(b - a\cos\omega)$, ni la somme de ces longueurs qui vaut $2(-a + b\cos\omega)$.

Soient S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 les points des quatre droites l inscrites qui sont sur OY : leurs distances au point B de OY donnent lieu aux mêmes propriétés ci-dessus, Leur produit est le même quelle que soit la grandeur de l; de plus, *il est égal au produit ci-dessus*, égal à $a^2 b^2$, ce qui est remarquable (on voit bien que l'équation en x devient l'équation donnant y si l'on change x en y, a en b et b en a).