NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Sur la détermination du centre de courbure en un point d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 345-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__345_1>

[L[1]6a]

SUR LA DÉTERMINATION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE CONIQUE;

PAR M. R. BOUVAIST.

On trouve dans les numéros de septembre, octobre et novembre 1915 des *Nouvelles Annales*, sous la rubrique « Questions proposées », un certain nombre

(1) *Journal fur Mathematik* (Crelle), t. 100, p. 434. Pour des cas étendus plus particuliers on pourra se reporter à mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (Jordan), 5e série, t. VI, 1900, p. 261, où les résultats sont obtenus plus simplement que dans le travail de M. Runge.

de constructions géométriques du centre de courbure en un point d'une conique, je voudrais indiquer dans les quelques lignes qui vont suivre deux constructions très générales, dont il est facile de tirer comme cas particuliers les constructions mentionnées plus haut.

Première construction. — Soit une conique Σ tangente à une droite Δ en un point O; soient A et B deux points fixes, M un point variable de Σ, les droites MA et MB coupent Δ en α et β; quand M varie, les points α, β engendrent une division homographique dont les deux points doubles sont confondus au point O. Soient α' et β' deux points correspondants de cette homographie; $M\alpha'$, $M\beta'$ coupent respectivement OA et OB en A' et B' et la droite $A'B'$ passera par un point fixe, intersection de AB et de OM. Il en résulte que la conique Σ' engendrée par les rayons homographiques $A'\alpha'$, $B'\beta'$, qui sera tangente à Δ en O, n'aura qu'un seul point commun avec Σ en dehors de O, elle sera donc osculatrice à Σ en O.

D'où la proposition suivante :

Étant données sur une droite Δ *une homographie ayant ses points doubles confondus en un point* O *et deux droites* Ox *et* Oy, *si l'on prend sur ces deux droites deux points* A *et* B, *toutes les coniques engendrées par les faisceaux homographiques obtenus en joignant* A *et* B *à deux points correspondants de l'homographie donnée sur la droite* Δ *seront osculatrices en* O, *quelle que soit la position des points* A *et* B *sur* Ox *et* Oy.

Soit Σ l'une de ces coniques, la parallèle à Δ menée par B coupe Σ en B_1; la droite AB_1 coupe Δ en I, qui est un point de l'homographie ayant son correspondant à l'infini. Si Σ est un cercle, B_1 sera sur la symétrique Oy' de Oy par rapport à la perpendiculaire Δ_1 à Δ en O et l'on aura $IB_1 . IA = \overline{IO}^2$. Le point A sera donc à l'intersection de Ox avec le cercle inverse (I) de Oy' par rapport à I, la puissance d'inversion étant $\overline{IO}^2$. Le point de (I) diamétralement opposé à O sera l'intersection K de la perpendiculaire à Δ en I avec la perpendiculaire OK à Oy en O, et le cercle Σ coupera Δ_1 au point L d'intersection de cette droite avec la perpendiculaire abaissée de K sur Ox.

Or si nous considérons les points K_1 et K_2 d'intersection des perpendiculaires à Δ en deux points correspondants de l'homographie avec les perpendiculaires OK_1 et OK_2 à Oy et Ox en O, la droite K_1K_2 passera par un point fixe sur Δ_1, point fixe qui n'est autre que le point L, puisque KL est une des positions particulières de K_1K_2.

D'où la proposition suivante :

Soient Σ *une conique tangente à la droite* Δ *en* O; *soient* A, M, B *trois points de cette conique;* MA *et* MB *coupent* Δ *en* α *et* β, *les perpendiculaires* OK_1 *et* OK_2 *à* OB *et* OA *coupent les perpendiculaires* αK_1, βK_2 *à* Δ *en* K_1 *et* K_2, *la droite* K_1K_2 *coupe la normale en* O *à* Σ *au point* L, OL *est le diamètre du cercle osculateur à* Σ *en* O.

Cette construction est due à P. Serret, qui l'a démontrée analytiquement dans sa Géométrie de direction.

Exemples. — 1° *La tangente en un point* O *d'une hyperbole de centre* ω *coupe les asymptotes en* α *et* β, *la perpendiculaire en* α *à* $\alpha\beta$ *coupe la perpendicu-*

laire abaissée de O *sur* $\omega\beta$ *en* K, *la perpendiculaire abaissée de* K *sur* $\omega\alpha$ *coupe la normale* OL *en* L, OL *est le diamètre du cercle osculateur en* O.

2° Questions proposées : **2257**, **2271**, **2277**, **2279**.

Deuxième construction. — Nous pouvons énoncer la proposition suivante, corrélative d'une proposition démontrée plus haut :

Soient sur une droite Δ *trois points* A, O, B, *par* A *et* B *on mène deux droites quelconques* MA *et* MB, *on considère un faisceau homographique de sommet* O, *admettant pour rayons doubles confondus la droite* Δ; *deux rayons correspondants* $O\alpha$ *et* $O\beta$ *rencontrent* MA *en* α, MB *en* β; *la droite* $\alpha\beta$ *enveloppe une conique* Σ, *toutes les coniques* Σ *obtenues en faisant varier le point* M *sont osculatrices en* O.

La perpendiculaire en O à $O\alpha$ rencontre la perpendiculaire en B à Δ en α_1, la perpendiculaire en O à $O\beta$ rencontre la perpendiculaire en A à Δ en β_1, la droite $\alpha_1\beta_1$ passe par un point fixe K de la perpendiculaire à Δ en O.

Supposons que la conique Σ soit un cercle de centre ω la symétrique de la tangente AM par rapport à $O\omega$ rencontre AB en A', BM en C. Les rayons OC, $O\omega$ se correspondent dans l'homographie considérée; par suite, si la perpendiculaire en O à OC rencontre la perpendiculaire à Δ en A en β_1, la droite $B\beta_1$ coupera $O\omega$ au point K.

La polaire de C par rapport au cercle Σ rencontre Δ en I, la division (BIA'O) est harmonique et la perpendiculaire abaissée de ω sur CO passe par I. Nous avons

$$\frac{A\beta_1}{O\omega} = \frac{OA}{OI}, \qquad \frac{A\beta_1}{KO} = \frac{AB}{OB}.$$

d'où

$$\frac{\mathrm{KO}}{\omega\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{OA.OB}}{\mathrm{OI.AB}};$$

or, puisqu'on a

$$\frac{2}{\mathrm{OI}} = \frac{1}{\mathrm{OA}} + \frac{1}{\mathrm{OB}},$$

il vient

$$\mathrm{KO} = \frac{\mathrm{O}\omega}{2},$$

d'où la proposition suivante :

Soit une conique Σ *inscrite dans un triangle* MAB *et touchant* AB *en* O, *une tangente quelconque à* Σ *rencontre* MA *en* α, MB *en* β, *les perpendiculaires à* AB *en* A *et* B *sont rencontrées respectivement en* β_1 *et* α_1 *par les perpendiculaires en* O *à* Oβ *et* Oα, *la droite* $\alpha_1\beta_1$ *coupe la normale en* O *en un point* K, OK *est égal à la moitié du rayon de courbure de* Σ *en* O.

Exemples. — 1° *Soit une hyperbole de centre* ω, *la tangente en un point* O *de la courbe coupe les asymptotes en* α *et* β; *soient* K_1 *le point d'intersection de la perpendiculaire en* O *à* Oω *avec la perpendiculaire en* α *à* Oα, K_2 *le point d'intersection de la perpendiculaire abaissée de* O *sur* $\omega\beta$ *avec la perpendiculaire en* β *à* Oβ. K_1K_2 *coupe la normale en* O *en* K, OK *est égal à la moitié du rayon de courbure en* O.

2° Questions proposées : 2267, 2271.

Troisième construction. — Je vais indiquer pour terminer une troisième construction qui, tout en étant d'une application moins fréquente que les deux précédentes, fournit une construction très simple du point de contact d'une quasi-normale avec son enveloppe.

Théorème. — *Soient* A *un point d'une conique,* A′ *le second point d'intersection de cette courbe avec la normale en* A, μ *le milieu de* AA′, F *le point de Frégier relatif au point* A, c *le centre de courbure en* A; c *est le conjugué harmonique de* μ *par rapport à* A *et* F.

Soient en effet AT la tangente en A, AB la seconde corde commune à la conique et au cercle osculateur à celle-ci en A, AB′ la perpendiculaire à AB en A. BB′ coupe la normale AA′ au point F. La polaire de F par rapport à la conique, qui est la seconde corde commune à cette conique et au cercle de rayon nul de centre A, est parallèle à AB; les deux droites AA′ et AB′ étant également inclinées sur les axes de la conique, la corde A′B′ est parallèle à AB. Si donc M est le milieu de AB, P l'intersection de AB′ et de BA′, les trois points M, F, P seront sur un même diamètre de la conique. Par suite Mμ passera par le milieu de AP, ce qui montre que c étant l'intersection de AA′ avec la perpendiculaire à AB en M, le faisceau M(AμFc) est harmonique.

Remarques. — 1° Ce théorème, joint au théorème de Pascal, fournit une construction assez simple du centre de courbure en un point d'une conique donnée par cinq de ses points.

2° Soient M un point variable d'une conique Σ, α et β deux points fixes de son plan; prenons la conjuguée harmonique de la tangente MT à Σ par rapport à Mα, Mβ, cette droite est la quasi-normale en M. Elle rencontre $\alpha\beta$ en γ, Σ en M′; soit γ' le conjugué harmonique de γ par rapport à MM′. Soit F le pôle de la corde $\alpha'\beta'$, α' et β' étant les intersections de Σ avec Mα, Mβ. D'après la proposition précédente, Mγ touchera son enveloppe au conjugué harmonique de γ' par rapport à M et F.

3° Considérons une quadrique Σ, soit M un de ses points; soient F le point de Fregier relatif au point M, M′ le second point d'intersection de la normale en M avec Σ, si l'on désigne par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure principaux en M, on voit facilement que l'on a la relation

$$\frac{2}{\text{MF}} - \frac{2}{\text{MM}'} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$