NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MATHIEU WEILL

Sur le produit des nombres dont chacun est une somme de deux carrés

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 311-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__311_0>

[113]

SUR LE PRODUIT DES NOMBRES DONT CHACUN EST UNE SOMME DE DEUX CARRÉS;

PAR M. MATHIEU WEILL.

Soit un nombre N égal à une somme de deux carrés, on aura

$$N = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi),$$

i étant le symbole imaginaire $\sqrt{-1}$.

Représentons $a + bi$ par A et l'imaginaire conjuguée $a - bi$ par A_1. On aura ainsi

$$N = A . A_1.$$

Un autre nombre qui sera aussi une somme de deux carrés s'écrira

$$\begin{aligned} N' &= c^2 + d^2 = (c + di)(c - di) \\ &= B . B_1. \end{aligned}$$

Le produit NN' s'écrira

$$\begin{aligned} NN' &= AA_1BB_1 \\ &= (AB)(A_1B_1) \\ &= (AB_1)(A_1B). \end{aligned}$$

Or AB et A_1B_1 sont deux imaginaires conjuguées, et leur produit est une somme de deux carrés; de même pour AB_1 et A_1B. On voit donc que le produit de deux nombres, dont chacun est une somme de deux carrés est, de deux manières, une somme de deux carrés, résultat bien connu.

Soit, maintenant, un produit de trois nombres N, N', N'', dont chacun est une somme de deux carrés; on aura

$$N = AA_1,$$
$$N' = BB_1,$$
$$N'' = CC_1.$$

Considérons AB et AB_1 et adjoignons C et C_1 successivement; nous aurons

$$ABC,$$
$$ABC_1,$$
$$AB_1C,$$
$$AB_1C_1.$$

Il est facile de voir que chacun de ces produits est distinct des autres, ainsi ABC diffère des trois autres, l'un par le changement de C en C_1, l'autre par le changement de B en B_1; et le dernier par le changement de BC en son conjugué B_1C_1; de même ABC_1 diffère des deux qui le suivent; enfin AB_1C diffère de AB_1C_1.

Dès lors, le produit NN'N'' sera, de quatre manières *différentes*, une somme de deux carrés, car on aura

$$\begin{aligned} NN'N'' &= (ABC)(A_1B_1C_1) \\ &= (ABC_1)(A_1B_1C) \\ &= (AB_1C)(A_1BC_1) \\ &= (AB_1C_1)(A_1BC), \end{aligned}$$

les facteurs entre parenthèses étant deux à deux conjugués.

En considérant, de même, quatre nombres

$$N = AA_1,$$
$$N' = BB_1,$$
$$N'' = CC_1,$$
$$N''' = DD_1,$$

on considérera les huit facteurs obtenus en adjoignant D et D_1 à chacun des quatre précédents,

$$\begin{array}{l} ABCD, \\ ABCD_1, \\ ABC_1D, \\ ABC_1D_1, \\ AB_1CD. \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Il est facile de voir que ces huit facteurs sont tous différents, et, en adjoignant à chacun son conjugué, on aura huit décompositions, *distinctes* de N, N′, N″, N‴ en une somme de deux carrés. On a donc enfin le théorème général suivant, que je me proposais d'établir :

Théorème. — *Le produit de p nombres, dont chacun est une somme de deux carrés, est une somme de deux carrés, de* 2^{p-1} *manières, et les résultats sont, tous, différents.*

Considérons, par exemple, le produit de cinq nombres, qui s'expriment par

$$a_1^2 + b_1^2, \quad a_2^2 + b_2^2, \quad \ldots, \quad a_5^2 + b_5^2.$$

Considérons le produit

$$P = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \ldots (a_5 + b_5 i).$$

Il est facile de le mettre sous la forme $A + Bi$, ce qui permet de mettre le produit des cinq nombres sous la forme $A^2 + B^2$. On a, en effet,

$$P = b_1 b_2 \ldots b_5 \left[\frac{a_1}{b_1} + i\right] \ldots \left[\frac{a_5}{b_5} + i\right],$$

$$P = b_1 b_2 \ldots b_5 \left[i^5 + i^4 \sum \frac{a_1}{b_1} + i^3 \sum \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} + \ldots\right].$$

Le calcul n'offre aucune difficulté, mais il est de plus en plus compliqué, à mesure que le nombre des facteurs, qui, ici, est de cinq, devient plus grand. On voit qu'au moyen des imaginaires, le calcul est praticable. Le calcul direct présente des difficultés insurmontables, quand le nombre des facteurs est un peu grand.