Nouvelles annales de mathématiques

R. Bricard

Mouvement d'une figure plane liée à deux courbes roulant sur des rouleaux

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 252-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__252_1>

[O[1]8a]

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE LIÉE A DEUX COURBES ROULANT SUR DES ROULEAUX;

PAR M. R. BRICARD.

1. Il y a quelques années, M. le lieutenant A. Bienaymé a publié ici même (1) une intéressante étude du mou-

(1) *Essai sur le déplacement d'un madrier sur deux rouleaux non parallèles* (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. III, 1903, p. 485).

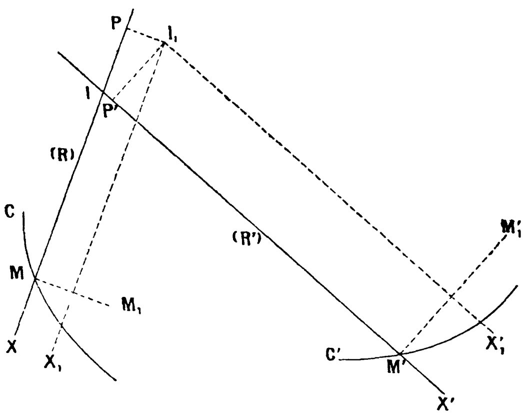
vement d'une droite roulant sur deux rouleaux non parallèles (mouvement qu'on réalise aisément au moyen d'une règle dont on appuie une arête sur deux crayons, roulant eux-mêmes sur une table). Un des résultats les plus saillants obtenus par cet auteur est que *l'aire du triangle formé par la droite et par les axes des rouleaux* (*en projection sur le plan de roulement*) *a une valeur constante*.

On peut, plus généralement, se proposer d'étudier le mouvement d'une figure plane (F) dans son plan, le mouvement étant défini par cette condition que deux courbes de la figure roulent chacune sur un rouleau. Les deux rouleaux sont des cylindres de révolution égaux qui roulent tous les deux sur un plan parallèle au plan de (F). On pourrait supposer plus généralement que ces rouleaux ont des rayons différents, mais alors ils devraient rouler sur des plans distincts, de manière que le plan de (F) pût glisser sur lui-même. La généralisation n'est d'ailleurs que fictive, comme on le reconnaît aisément, et ne conduit à aucun résultat différant de ceux que nous allons obtenir.

2. Il faut d'abord définir avec précision le roulement d'une courbe sur une surface, dans les conditions les plus générales. Soient (S) et C une surface et une courbe, mobiles toutes les deux en général, et cela de manière à rester constamment tangentes. *On dit que* C *roule sur* (S) *si*, *à un moment quelconque*, *le vecteur vitesse de leur point de contact est le même*, *que l'on considère ce point comme lié à la courbe ou à la surface*.

Cela posé, soient C et C′ les courbes de (F) qui roulent respectivement sur les rouleaux R et R′ (*fig.* 1). Soient X et X′ les axes de ceux-ci. Les points de contact M et M′, de C et de C′ avec les rouleaux correspondants sont respectivement, en projection sur le plan de la figure, sur X et sur X′.

Fig. 1.



Déplaçons la figure (F). La vitesse du point M, considéré comme appartenant à R, est évidemment perpendiculaire à X. Il en est donc de même, en vertu du principe énoncé plus haut, de la vitesse du point M considéré comme appartenant à C, c'est-à-dire à (F). De même la vitesse du point M′ de (F) est perpendiculaire à X′. *Il résulte immédiatement de là que le centre instantané de rotation de la figure* (F) *est le point* I, *intersection de* X *et de* X′.

Au cours du mouvement, l'axe X éprouve une translation, dont la vitesse est évidemment la moitié de celle du point M. De même pour l'axe X′ et le point M′.

Ces simples considérations suffisent pour traiter le problème proposé, comme on le verra plus loin. Mais il n'est pas sans intérêt de signaler ici une propriété importante du mouvement envisagé.

Cherchons la tangente au lieu du point I. A cet effet, désignons par $d\varphi$ l'angle de la rotation autour du point I qui constitue le déplacement infinitésimal de (F), à partir de sa position actuelle. Le point M vient en M_1, MM_1 étant perpendiculaire à X, le point M' vient en M'_1, $M'M'_1$ étant perpendiculaire à X', et l'on a

$$MM_1 = IM\,d\varphi, \qquad M'M'_1 = IM'\,d\varphi.$$

Les axes X et X' sont venus en X_1 et X'_1, ayant subi des translations dont les valeurs sont respectivement $\frac{1}{2}MM_1$ et $\frac{1}{2}M'M'_1$, d'après la remarque faite plus haut. Soient I_1 le point de rencontre de X_1 et de X'_1, P et P' ses projections respectives sur X et sur X'. On a

$$(1) \qquad I_1P = \frac{1}{2}IM\,d\varphi, \qquad I_1P' = \frac{1}{2}IM'\,d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\sin\widehat{PII_1}}{\sin\widehat{P'II_1}} = \frac{I_1P}{I_1P'} = \frac{IM}{IM'} = \frac{\sin\widehat{IM'M}}{\sin\widehat{IMM'}}.$$

Mais comme

$$\widehat{PII_1} + \widehat{P'II_1} = \widehat{IM'M} + \widehat{IMM'},$$

cela exige

$$\widehat{PII_1} = \widehat{IM'M}, \qquad \widehat{P'II_1} = \widehat{IMM'}.$$

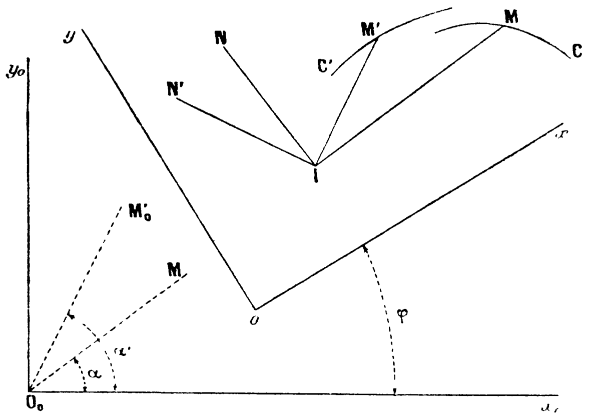
On en conclut immédiatement *que* II_1, *c'est-à-dire la tangente au lieu du point* I, *se confond avec la tangente au cercle* IMM'. Telle est la construction simple demandée.

On peut également chercher les tangentes aux lieux des points de contact M et M' des courbes C et C' avec les rouleaux correspondants (il s'agit, bien entendu, des courbes engendrées par les points qui sont *succes-*

sivement points de contact). On reconnaît que la tangente au lieu du point M, par exemple, est la symétrique par rapport à X de la tangente en M à C. Je ne m'attarderai pas à établir ce résultat, établi, ainsi du reste que celui qui précède, par M. Bienaymé, dans le cas particulier où les courbes C et C′ se réduisent à une même droite.

3. Abordons maintenant le problème posé au n° 1. Soient (*fig.* 2) Ox, Oy deux axes rectangulaires

Fig. 2



entraînés avec les courbes C et C′, O_0x_0 et O_0y_0 deux axes fixes, O_0M_0 et $O_0M'_0$ deux demi-droites parallèles aux axes IM et IM′ des rouleaux sur lesquelles roulent les courbes C et C′. Appelons φ l'angle $(\widehat{O_0x_0, Ox})$, α et α' les angles constants $(\widehat{O_0x_0, O_0M_0})$ et $(\widehat{O_0x_0, O_0M'_0})$.

Soient x, y les coordonnées du centre instantané de rotation I par rapport aux axes mobiles, ρ et ρ' les longueurs IM et IM′, susceptibles de signes, puisqu'elles sont portées par des droites orientées. ρ et ρ' sont des fonctions, de formes connues, des quantités x, y et φ.

Nous allons exprimer analytiquement les propriétés traduites au n° **2** par les égalités (1). Comme la question étudiée est géométrique, on peut supposer que le mouvement a lieu de manière que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ soit constamment égale à l'unité. Dans ces conditions, les égalités (1) expriment que les composantes de la vitesse du point I [1], suivant les directions IN et IN′ qui font l'angle $\frac{\pi}{2}$ respectivement avec IM et IM′, ont pour valeurs $\frac{1}{2}\rho$ et $\frac{1}{2}\rho'$ (en grandeur et en signe). Ces propriétés ont été établies en ce qui concerne la vitesse absolue du point I. Mais en vertu d'une propriété fondamentale du centre instantané de rotation, *elles sont également vraies en ce qui concerne sa vitesse relative*.

Or, la vitesse relative du point I a pour composantes, suivant Ox et Oy,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\varphi}.$$

Sa composante suivant IN est donc

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi}\cos\left(\alpha - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) &+ \frac{dy}{d\varphi}\cos(\alpha - \varphi)\\ &= \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi - \alpha) + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi - \alpha)\end{aligned}$$

---

[1] Il s'agit, bien entendu, de la vitesse du point, mobile par rapport à la figure mobile comme par rapport à la figure fixe, qui devient successivement centre instantané de rotation pour les diverses positions de la première figure.

et sa composante suivant IN′ est de même

$$\frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi-\alpha')+\frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi-\alpha').$$

On a donc

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi-\alpha)+\frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi-\alpha)&=\frac{1}{2}\rho,\\ \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi-\alpha')+\frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi-\alpha')&=\frac{1}{2}\rho'.\end{aligned}\right.$$

On a là un système de deux équations différentielles linéaires en x et y, dont l'intégration fait connaître x et y en fonction de φ.

On connaît ainsi le lieu du point I par rapport au système mobile, c'est-à-dire la *courbe roulante* du mouvement considéré.

La solution du problème s'achève aisément. Soient, en effet, ξ, η les coordonnées du point O par rapport aux axes fixes; les coordonnées relatives x, y du centre instantané de rotation I satisfont aux relations connues

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\varphi}-x\sin\varphi-y\cos\varphi&=0,\\ \frac{d\eta}{d\varphi}+x\cos\varphi-y\sin\varphi&=0,\end{aligned}\right.$$

et ses coordonnées absolues x_0, y_0 sont données par les formules

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0&=\xi-\frac{d\eta}{d\varphi},\\ y_0&=\eta+\frac{d\xi}{d\varphi};\end{aligned}\right.$$

x et y étant connus en fonction de φ, les formules (3) donnent ξ et η par les quadratures

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \int (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,d\varphi,\\ \eta &= \int (-x\cos\varphi + y\sin\varphi)\,d\varphi,\end{aligned}\right.$$

et les formules (4) permettent ensuite de construire la courbe base, lieu du point I dans le plan fixe.

L'intégration du système (2) présentera le plus souvent de grandes difficultés, comme le montre l'étude du cas, cependant l'un des plus simples, *a priori*, traité par M. Bienaymé.

4. Voici un exemple assez intéressant. *Supposons que les courbes* C *et* C′ *se réduisent à deux droites faisant entre elles un angle égal à celui des rouleaux correspondants.* On peut supposer que C′ se confond avec Ox, la droite C passant par le point O et faisant un angle α avec Ox. La droite O_0M_0' sera supposée coïncider avec O_0x_0, O_0M_0 faisant l'angle α avec O_0x_0. Écrivons les équations (2). En vertu de l'hypothèse, il faut faire dans la seconde $\alpha' = 0$.

Calculons ρ. Il faut écrire que le point M est sur la droite C, ce qui donne

$$\cos\alpha[y + \rho\sin(\alpha-\varphi)] = \sin\alpha[x + \rho\cos(\alpha-\varphi)],$$

ou

$$\rho[\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)] = \rho\sin\varphi = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

et

$$\rho = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

La première des équations (2) est donc

$$(6)\qquad \frac{dx}{d\varphi}\sin(\varphi-\alpha) + \frac{dy}{d\varphi}\cos(\varphi-\alpha) = \frac{1}{2}\,\frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin\varphi}.$$

La seconde s'en déduit immédiatement en remplaçant α par zéro, ce qui donne

$$(7) \qquad \frac{dx}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{y}{\sin\varphi}.$$

Retranchons de l'équation (6) l'équation (7) multipliée par $\cos\alpha$. Il vient, en supprimant le facteur $\sin\alpha$,

$$(8) \qquad -\frac{dx}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sin\varphi}.$$

Il faut intégrer le système des équations différentielles (7) et (8). Avant de le faire, remarquons tout de suite que ce système est indépendant de α. On aurait donc obtenu le même système en remplaçant les droites C et O_0M_0 par deux droites C' et $O_0M'_0$, inclinées d'un même angle quelconque α', respectivement sur Ox et sur O_0x_0. Il revient au même de dire que, dans le mouvement considéré, toute droite de la figure mobile, passant par le point O, roule sur un rouleau faisant avec O_0x_0 le même angle que cette droite fait avec Ox. On peut énoncer comme il suit ce résultat, susceptible d'une vérification expérimentale assez simple :

Un faisceau de droites, de grandeur constante, peut recevoir un mouvement tel que chacune de ses droites roule sur un rouleau roulant lui-même sur un plan, et les axes des rouleaux restant parallèles aux droites d'un faisceau fixe égal au faisceau considéré. Ces axes forment d'ailleurs eux-mêmes un faisceau à un moment quelconque (puisqu'ils doivent tous passer par le centre instantané de rotation correspondant).

Revenons à l'intégration du système des équations (7) et (8). Pour la faire rapidement, multiplions la seconde par $i = \sqrt{-1}$ et ajoutons à la première. Il vient

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} + i\frac{dy}{d\varphi}\right)\sin\varphi + \left(\frac{dy}{d\varphi} - i\frac{dx}{d\varphi}\right)\cos\varphi = \frac{y - ix}{2\sin\varphi},$$

ou encore

$$\left(\frac{dy}{d\varphi} - i\frac{dx}{d\varphi}\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{y - ix}{2\sin\varphi},$$

ou enfin

$$\frac{\frac{d}{d\varphi}(y - ix)}{y - ix} = \frac{1}{2\sin\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{2\sin\varphi},$$

et en intégrant

$$\mathrm{L}(y - ix) = \mathrm{LK} + i\theta + \frac{1}{2}\mathrm{L}\sin\varphi - \frac{i}{2}\varphi,$$

$\mathrm{LK} + i\theta$ étant une constante, en général imaginaire, et mise sous une forme commode pour la suite des calculs. On tire de là

$$y - ix = \mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\, e^{i\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

et, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$x = \mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right),$$

$$y = \mathrm{K}\sqrt{\sin\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta\right).$$

On reconnaît aisément que ces équations représentent une *lemniscate* ayant son point double à l'origine, c'est-à-dire au sommet du faisceau mobile. Telle est donc la courbe roulante du mouvement.

Pour achever, il faut appliquer les formules (5). Observons d'abord que l'on peut supposer que les axes Ox et Oy sont les tangentes au point double de la lemniscate, ce qui revient, on le voit aisément, à faire $\theta = 0$. On a alors

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = K\sqrt{\sin\varphi}\left(\sin\varphi \sin\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= K\sqrt{\sin\varphi}\cos\frac{\varphi}{2},$$
$$-x\cos\varphi + y\sin\varphi = K\sqrt{\sin\varphi}\left(-\cos\varphi \sin\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= K\sqrt{\sin\varphi}\sin\frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\xi = K\int\sqrt{\sin\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi, \qquad \eta = K\int\sqrt{\sin\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Ces intégrales sont elliptiques, comme on le voit tout de suite par le changement de variable

$$e^{i\frac{\varphi}{2}} = t.$$

La courbe base du mouvement, c'est-à-dire le lieu du point (x_0, y_0), est donnée par les formules (4), comme on l'a vu.

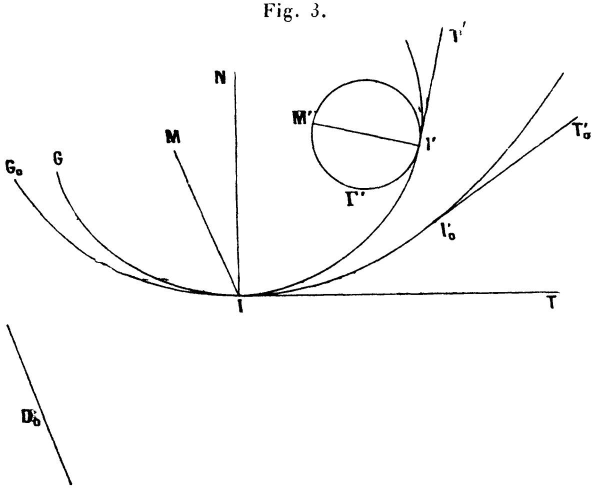
5. L'exemple précédent met en évidence l'existence d'un mouvement plan, au cours duquel une infinité de droites de la figure mobile roulent chacune sur un rouleau. Je vais montrer qu'il n'y a là qu'un cas particulier d'une proposition générale, dont voici l'énoncé :

Étant donné un mouvement plan quelconque, il existe dans la figure mobile une infinité de courbes dont chacune peut être considérée comme roulant sur un rouleau, qui roule lui-même sur un plan. Toutes ces courbes se déterminent d'ailleurs sans quadrature.

J'établirai cela par un raisonnement géométrique.

Considérons un mouvement défini par le roulement de la courbe G sur la courbe G_0, et cherchons une courbe C, liée à G, qui, au cours du mouvement, roule sur un rouleau dont l'axe est parallèle à la droite fixe D_0 (*fig.* 3). Au moment où le centre instantané de rotation

Fig. 3.



est en I, le point de contact M de C et du rouleau doit être tel (n° 2) que IM soit parallèle à D_0, et il faut en outre que la projection du déplacement infinitésimal du point I sur la tangente à la trajectoire du point M soit moitié du déplacement de ce dernier point.

Soient ds le déplacement du point I sur G_0, $d\varphi$ l'angle de la rotation autour de I qui constitue le déplacement élémentaire de la figure mobile, R et R_0 les rayons de courbure des courbes G et G_0 au point I. L'angle $d\varphi$ est, comme il est bien connu, et d'ailleurs évident, la différence des angles de contingence des courbes G_0 et G. On a donc

$$d\varphi = ds\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right).$$

D'autre part, le déplacement du point M est égal à $\mathrm{IM}\,d\varphi$ et la projection du déplacement du point I sur la tangente à la trajectoire du point M est

$$ds \cos\left[\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\,ds \sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right),$$

IT étant la tangente commune aux courbes G et G_0. On a donc

$$\mathrm{IM}\,d\varphi = -\,2\,ds \sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right),$$

ou

$$\mathrm{IM}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) = -\,2 \sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right)$$

et enfin

$$\mathrm{IM} = 2\frac{RR_0}{R_0 - R}\sin\left(\widehat{\mathrm{IT},\mathrm{IM}}\right) = 2\frac{RR_0}{R_0 - R}\cos\widehat{\mathrm{NIM}},$$

IN étant la normale en I.

On en déduit immédiatement que le point M doit se trouver sur un cercle tangent en I à G_0 et G et ayant pour rayon $\frac{RR_0}{R_0 - R}$. Ce cercle n'est autre que celui qu'on appelle *cercle de roulement*, et dont l'importance résulte du fait que, pour la fonction considérée de G, la distribution des centres de courbure des trajectoires des points de la figure mobile est la même que si le cercle de roulement roulait sur IT.

En vue d'abréger, j'ai passé rapidement sur les questions de signe, dans le raisonnement qui précède. Il serait facile de le compléter sous ce rapport.

La démonstration du théorème énoncé est maintenant immédiate. En chaque point de la courbe G, par exemple au point I′, construisons le cercle Γ′ qui deviendra cercle de roulement, quand le point I′ deviendra centre instantané de rotation. Déterminons ensuite le point M′ tel qu'à ce même moment I′M′

devienne parallèle à D_0. A cet effet, marquons sur G_0 le point I'_0 avec lequel viendra se confondre I' (arc $II'_0 =$ arc II'). Soient $I'T'$ et $I'_0T'_0$ les tangentes en I' et en I'_0. La direction de $I'M'$ est évidemment donnée par la relation

$$\widehat{I'T', I'M'} = \widehat{I'_0T'_0, D_0}.$$

Le lieu du point M', ainsi déterminé, est une courbe C jouissant de la propriété énoncée.

A chaque direction donnée D_0 correspond une telle courbe C et une seule.

Un cas particulier remarquable est celui où le mouvement donné est *un mouvement cycloïdal:* la courbe G se confondant avec le cercle de roulement pour toutes les positions de la figure, toutes les courbes C se confondent aussi avec G. Autrement dit :

Quand un cercle roule sur une droite, ce cercle roule aussi sur une infinité de rouleaux dont les axes, à un moment quelconque, passent par le centre instantané de rotation.

La réciproque est peut-être plus frappante, et le lecteur, après ce qui précède, n'aura nulle peine à l'établir. Elle s'énonce ainsi :

Assujettissons un cercle horizontal à rouler sur deux rouleaux horizontaux, dont les axes, à un certain moment, se coupent en un point du cercle : 1° *au cours du mouvement, cette propriété ne cessera pas d'avoir lieu;* 2° *on peut, sans gêner le mouvement du cercle, le faire rouler sur un nombre quelconque de rouleaux dont les axes concourent avec ceux des deux premiers;* 3° *le mouvement du cercle est le même que s'il roulait sur une droite, lieu du point de concours des axes des rouleaux.*

Je signalerai enfin la recherche des courbes C dans *un mouvement épicycloïdal*. On vérifiera que ce sont des *épicycloïdes*.

6. Les roulements de courbes sur des surfaces peuvent donner lieu à bien d'autres problèmes intéressants. Je me contenterai de signaler en terminant une propriété dont la démonstration est immédiate et qui peut être susceptible d'applications : Imaginons un nombre quelconque de rouleaux cylindriques égaux, dont les axes *fixes* (les rouleaux reposant sur des coussinets) forment un faisceau plan. Une courbe *plane quelconque* peut être déplacée de manière à rouler sans glissement sur tous ces rouleaux, et son mouvement n'est autre qu'une rotation autour du centre du faisceau.

On peut construire par exemple une plaque tournante, dont le bord repose sur des rouleaux à axes concourants. La plaque n'a pas besoin d'être ronde pour fonctionner d'une manière satisfaisante.