

## Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 16 (1916), p. 235-240

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1916\\_4\\_16\\_\\_235\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__235_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

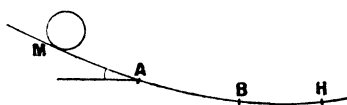


---

**CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.**

Clermont.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Un disque circulaire, homogène, de masse  $m$  et de rayon  $R$ , repose sur un plan*



*incliné rugueux, qui fait l'angle  $i$  avec le plan horizontal. Le coefficient de frottement de glissement du disque sur le plan est appelé  $f$  et l'on néglige le frottement du roulement.*

*Le disque étant placé dans un plan vertical, tangentiellement à une ligne de plus grande pente, on le lance avec une vitesse de translation quelconque parallèle à cette ligne et une vitesse de rotation quelconque autour de son axe. Déterminer son mouvement. Discuter les différentes phases qui peuvent se présenter, suivant les conditions initiales et suivant la valeur de l'angle  $i$ . Déterminer la réaction en M, dans chaque phase.*

*2° On raccorde le plan incliné avec un plan horizontal H, de même nature, au moyen d'une surface cylindrique, également de même nature et dont la section droite est un certain arc de courbe AB. On suppose qu'au moment où le disque arrive en A, il se trouve dans une période de non-glissement. En admettant que cette absence de glissement persiste, montrer que le disque arrive en B avec une vitesse indépendante de la forme de l'arc AB, pour une différence donnée entre les niveaux des points A et B.*

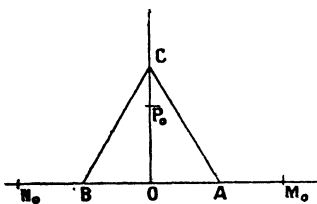
Déterminer le mouvement du disque sur l'arc AB, en supposant ce dernier circulaire et de rayon  $\rho > R$ . Montrer que ce mouvement est perpendiculaire et calculer la longueur du pendule synchrone.

3° Le disque roulant maintenant sur le plan horizontal, avec une vitesse de translation  $v$ , on imagine qu'il vient heurter un autre disque identique, au repos sur H et dans le plan du premier disque. On néglige le frottement des deux disques l'un sur l'autre et on les suppose entièrement dénués d'élasticité. Enfin, on admet qu'ils restent tous deux en contact avec le plan H. On demande de calculer leurs vitesses après le choc. Démontrer qu'ils restent ensuite en contact et déterminer leur mouvement ultérieur. Calculer les diverses réactions, dans les différentes phases de ce mouvement.

(On admettra que, dès que le glissement d'un des disques sur le plan H a cessé, il ne réapparaît plus.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne trois points fixes A, B, C, formant un triangle équilatéral, de côté égal à deux et trois mobiles M, N, P, de masse commune égale à 1.

Ces derniers s'attirent deux à deux, suivant des forces



égales à leurs distances mutuelles. De plus, A, B, C attirent respectivement M, N, P, suivant des forces égales à AM, BN, CP.

1° Déterminer la position d'équilibre du système.

2° Déterminer le mouvement du système, quand on l'abandonne, sans vitesse initiale, dans la position  $M_0N_0P_0$  telle que

$$OM_0 = ON_0 = 2, \quad OP_0 = a.$$

Quel est, en particulier, le mouvement du centre de gra-

vité? On construira les trajectoires de M et de N et l'on décrira le mouvement de P, en supposant que  $P_0$  est en O. On déterminera, en particulier, les époques et positions de rencontre de M et de N. Enfin, on étudiera les variations de l'énergie cinétique du système. (Juin 1914.)

### Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° Pendule conique.  
2° Équations de Lagrange.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Deux points fixes sont situés dans le même plan horizontal à une distance de  $4^m$ . Deux fils élastiques identiques ont comme longueur  $1^m$ , et chacun d'eux est en équilibre lorsqu'il est vertical, une extrémité étant fixe et l'autre supportant un poids de  $100^g$ , la longueur étant alors de  $2^m$ . Chaque fil a une extrémité attachée à l'un des points fixes, et l'autre à un point matériel du poids de  $100^g$ , qui glisse avec frottement sur le plan horizontal. A l'instant initial, cette petite masse est en repos à  $1^m$  de l'un des points fixes, entre les deux points fixes. On demande de déterminer le coefficient de frottement de façon que le point matériel arrive sans vitesse à égale distance des points fixes. On sait que la tension d'un fil élastique est proportionnelle à l'allongement du fil. (Novembre 1913.)

### Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Un fil rigide homogène forme le périmètre d'un triangle équilatéral ABC de côté  $a$  de masse  $m$ . Le côté BC peut glisser sur une horizontale fixe Ox, le plan xOy du triangle reste vertical. Au point A est attaché le fil d'un pendule simple AP dont la longueur est  $\frac{a}{2}$ ; la masse du point P est  $m$ , celle du fil est négligeable. Le pendule oscille dans le plan du triangle. Les liaisons sont sans frottement.

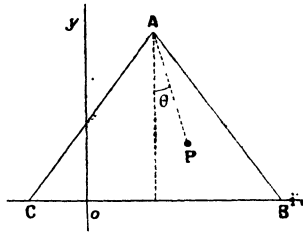
1° Étudier le mouvement du système en supposant qu'à l'instant initial les vitesses soient nulles et que P coïncide avec le milieu de AB.

2° Calculer la tension du fil à un instant où il est ver-

tical; dans les mêmes conditions, déterminer les réactions exercées par  $Ox$ , en supposant qu'elles se réduisent à deux forces  $\beta$ ,  $\gamma$  appliquées en B et C.

3° On immobilise brusquement le triangle à un instant où P est sur la verticale du point A. Déterminer le mouvement ultérieur, la liaison nouvelle étant supposée persistante. Évaluer la force vive perdue.

Nota. — Prendre pour paramètres l'abscisse  $x$  de A et



l'angle  $\theta$  de AP et de la verticale descendante.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un carré de côté  $l$  engendre un double cône en tournant autour d'une de ses diagonales  $OO'$ . Un solide homogène pesant S est limité par ce double cône.

1° Déterminer les moments principaux d'inertie de S relatifs à son centre de gravité G et ceux relatifs au sommet O.

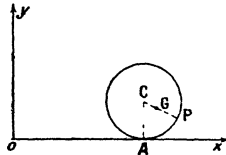
2° On suppose que S est mobile autour du point O qui est fixe et qu'à l'instant initial l'axe  $OO'$  est horizontal, la vitesse de  $O'$  étant nulle. On sait que dans le mouvement ultérieur la distance maximum de  $O'$  au plan horizontal passant par O est  $l\sqrt{2}\cos\alpha$ . Quelle est la vitesse initiale de rotation de S autour de  $OO'$ ?

(Juillet 1913.)

Problème. — Une circonférence homogène se meut dans un plan vertical fixe et repose sur une horizontale fixe  $Ox$  de ce plan, sur laquelle elle peut glisser et rouler. Un point matériel pesant P peut se déplacer sur la

circonférence; ce point et la circonférence ont même masse  $M$ .

1° Étudier le mouvement du système.



2° Calculer les réactions qui s'exercent en P et au point A de contact de la circonférence et de la droite  $Ox$ .

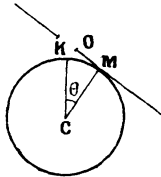
ÉPREUVE PRATIQUE. — Une plaque plane homogène de masse  $M$ , d'épaisseur négligeable, est limitée par un hexagone régulier de côté  $a$ .

1° Former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité.

2° La plaque se mouvant autour de son centre de gravité supposé fixe est animée d'un mouvement à la Poinsot. Déterminer, pour chacun des deux cônes roulettes fixe et mobile, le demi-angle au sommet, sachant qu'à l'instant initial la rotation instantanée fait un angle de  $30^\circ$  avec le plan de la plaque.  
(Novembre 1913.)

### Lyon.

COMPOSITION ÉCRITE. — On donne une circonférence de cercle fixe dans un plan vertical. Soient  $C$  son centre,  $K$  l'extrémité supérieure de son diamètre vertical. Une



tige rectiligne matérielle homogène pesante infiniment mince, de longueur  $2l$  et de centre  $O$ , est placée tangentiellement en un point  $M_0$  de la demi-circonférence supé-

rieure, et animée d'une vitesse initiale quelconque, de manière cependant que la tige ne sorte pas du plan de la circonférence. On suppose de plus que la circonférence et la tige sont assez rugueuses pour que cette tige ne puisse que rouler sans glisser sur la circonférence et que, quand la tige devient horizontale, elle soit en contact avec la circonférence par son milieu O, qui vient alors toujours ainsi en K. On demande d'étudier le mouvement. Indiquer les différentes méthodes qui peuvent être employées en en justifiant l'usage : mais n'employer effectivement que l'une d'elles pour établir la ou les équations différentielles du mouvement. Celles-ci établies, poursuivre l'étude du mouvement en se bornant au cas des petits mouvements, et par conséquent en considérant comme devant rester constamment petit du premier ordre l'angle  $\theta = \widehat{KCM}$ .

( Novembre 1913. )

COMPOSITION ÉCRITE. — Un point matériel pesant est assujéti à rester sur la surface d'une sphère; il est attiré par un point de la verticale passant par le centre de la sphère proportionnellement à la distance. Sa vitesse initiale est horizontale. Entre quelles limites varie pendant le mouvement la hauteur du mobile? Déterminer le coefficient d'attraction de façon que la vitesse reste constante, et étudier alors complètement le mouvement.

( Juin 1914. )