V. THÉBAULT

Sur le cercle de Taylor relatif au triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 209-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__209_1>

[K[1]2d]

SUR LE CERCLE DE TAYLOR RELATIF AU TRIANGLE;

PAR M. V. THÉBAULT,

Professeur à Ernée (Mayenne).

1. Dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1909, p. 248, nous avons donné sous le n° **2422** la question suivante sur laquelle nous voudrions revenir ici :

Sur les côtés d'un triangle comme diamètres on décrit trois circonférences, puis on mène les lignes des centres qui coupent les demi-circonférences extérieures en six points. Démontrer que ces six points sont sur un même cercle.

APPLICATION. — *Si des pieds des hauteurs d'un triangle on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, les six points obtenus sont sur un même cercle.*

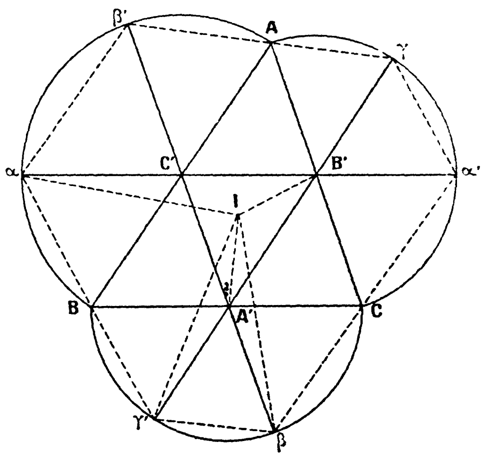
Soient ABC le triangle; A′, B′, C′ les milieux des côtés BC, CA, AB; α et α' les points d'intersection de B′C′ avec les demi-circonférences de centres B′ et C′; β et β', γ et γ' les points analogues (*fig.* 1).

On a

$$A'C' = B'A = B'\gamma',$$
$$A'B' = C'A = C'\beta'.$$

On en déduit que $A'\beta'$ est égal à $A'\gamma$. Donc le triangle $A'\beta'\gamma$ est isoscèle et il est ainsi homothétique de chacun des triangles isoscèles $C'\beta'A$ et $B'A\gamma$. Les droites $\beta'A$, $A\gamma$, $\beta'\gamma$ sont parallèles, ce qui prouve que

Fig. 1.



la droite $\beta'\gamma$ passe par A. De même $\gamma'\alpha$ passe par B et $\alpha'\beta$ par C. Le triangle $A'\beta'\gamma$ est aussi homothétique du triangle isoscèle $A'\beta\gamma'$, ce qui montre que $\beta\gamma'$ est parallèle à $\beta'\gamma$. De même, $\gamma\alpha'$ est parallèle à $\gamma'\alpha$ et $\alpha\beta'$ est parallèle à $\alpha'\beta$.

Le quadrilatère $A\beta'\alpha B$ étant inscriptible, il en est de même du quadrilatère $\gamma\beta'\alpha\gamma'$, puisque $\gamma\gamma'$ et AB sont parallèles. De même, les quadrilatères $\alpha\gamma'\beta\alpha'$ et $\beta\alpha'\gamma\beta'$ sont inscriptibles.

D'autre part, les droites $\beta\gamma'$ et $\beta'A$ étant parallèles, on a

$$\widehat{\gamma'\beta\beta'} = \widehat{\beta\beta'A} = \widehat{\beta'AB};$$

mais, dans le quadrilatère inscriptible $A\beta'\alpha B$, l'angle $\beta'AB$ est supplémentaire de l'angle $B\alpha\beta'$ ou $\gamma'\alpha\beta'$. Par suite, les angles $\gamma'\beta\beta'$ et $\gamma'\alpha\beta'$ sont supplémentaires et le quadrilatère $\beta'\alpha\gamma'\beta$ est inscriptible. De même, les quadrilatères $\gamma'\beta\alpha'\gamma$ et $\alpha'\gamma\beta'\alpha$ sont inscriptibles.

On obtient ainsi six quadrilatères inscriptibles $\gamma\beta'\alpha\gamma'$ et $\gamma\alpha'\beta\gamma'$, $\alpha\gamma'\beta\alpha'$ et $\alpha\beta'\gamma\alpha'$, $\beta\gamma'\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'\gamma\beta'$. Ils ont, pris deux à deux, trois sommets communs : $\gamma\beta'\alpha\gamma$ et $\beta\gamma'\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'\beta\alpha'$ et $\gamma\alpha'\beta\gamma'$, $\beta\alpha'\gamma\beta'$ et $\alpha\beta'\gamma\alpha'$. Donc ces six quadrilatères sont inscriptibles dans le même cercle, autrement dit, les six points α, α', β, β', γ, γ' sont sur un même cercle.

Autrement, soit I le point de rencontre des bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$. Les deux triangles $IA'\gamma'$ et $IA'\beta$ sont égaux; ils ont, en effet, le côté IA' commun, les côtés $A'\gamma'$ et $A'\beta$ égaux comme rayons d'un même cercle, enfin, les angles $IA'\gamma'$ et $IA'\beta$ égaux comme formés de parties égales deux à deux. Donc

$$I\beta = I\gamma'.$$

D'autre part les deux triangles $IB'\alpha$ et $IB'\gamma'$ sont égaux; ils ont en effet le côté IB' commun, les angles $IB'\alpha$ et $IB'\gamma'$ égaux par construction, enfin les côtés $B'\alpha'$ et $B'\gamma'$ égaux, car

$$B'\alpha = B'C' + C'\alpha = CA' + C'B = A'\gamma' + B'A' = B'\gamma'.$$

Par suite

$$I\gamma' = I\alpha.$$

On a donc

$$I\beta = I\gamma' = I\alpha.$$

Par analogie

$$I\beta = I\gamma' = I\alpha = I\beta' = I\gamma = I\alpha'.$$

Les six points α, α', β, β', γ, γ' *sont sur un même cercle qui a pour centre le point de rencontre* I *des bissectrices intérieures du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle* ABC.

Enfin soient d, e, f les points de contact des côtés du triangle $A'B'C'$ avec le cercle inscrit I à ce triangle; a, b, c, p, r les éléments habituels du triangle ABC.

On a par exemple

$$\alpha d = \alpha C' = C' d = \frac{c}{2} + \frac{p-c}{2} = \frac{p}{2}.$$

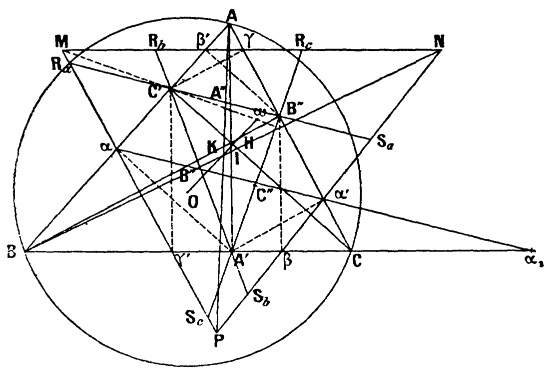
Par suite le rayon du cercle I des points α, α', β, β', γ, γ' a pour expression

$$(1) \qquad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + r^2}.$$

Application. — Soient un triangle ABC; A', B', C' les pieds des hauteurs; α et α' les projections de A' respectivement sur AB et AC; β et β' celles de B' respectivement sur BC et sur BA; γ et γ' celles de C' respectivement sur CA et sur CB (*fig.* 2).

Visiblement, en désignant par A'', B'', C'' les milieux respectifs de $B'C'$, $C'A'$ et $A'B'$, les points β' et γ sont les intersections de $A''C''$ et de $B''A''$ avec la demi-circonférence A'' extérieure à $A'B'C'$ et de diamètre $B'C'$. De même α et α' sont situés sur $B''C''$, γ, γ' sur $A''B''$ et β, β' sur $A''C''$. D'après ce qui précède, les six points α, α', β, β', γ, γ' sont situés sur une circonférence Ω dont le centre est l'intersection des bissectrices intérieures du

Fig. 2.



triangle A''B''C''. Le rayon de ce cercle découle de la formule (1) :

$$\rho' = R\sqrt{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \quad (^1).$$

Ce cercle Ω est connu sous le nom de *cercle de Taylor du triangle* ABC.

2. Les côtés B'C', C'A', A'B' sont respectivement antiparallèles aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC dans les angles A, B, C. De même $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$ sont antiparallèles respectivement aux côtés du triangle A'B'C' dans les angles A, B, C. Par conséquent $\gamma\beta'$ est parallèle à BC, $\gamma'\alpha$ à CA, $\alpha'\beta$ à AB, et *les triangles* ABC *et* MNP *sont inversement homothétiques*, M, N, P étant les intersections de $\beta'\gamma$ et $\gamma'\alpha$, $\beta'\gamma$ et $\alpha'\beta$, $\alpha'\beta$ et $\gamma'\alpha$. Cherchons leur centre d'homothétie (*fig.* 2).

(1) Nous ne savons si cette valeur simple de ρ' a été donnée déjà ; elle découle des valeurs du périmètre p' et du rayon du cercle inscrit r' relatifs au triangle orthique A'B'C' de ABC (V. T.).

Soient M′, N′, P′ les pieds des hauteurs du triangle MNP. B′ et P′, C′ et M′ sont des couples de points homologues et comme le quadrilatère (MN, BC), (BA, NP) est un parallélogramme, la diagonale BN contient les milieux de B′C′ et M′P′. Donc BN *est symédiane commune aux triangles* ABC *et* MNP.

Il en est de même de CM et AP et l'on a ce théorème dû à M. Neuberg (*Mathesis*, question n° 10) :

Les triangles ABC *et* MNP *sont inversement homothétiques, le centre d'homothétie étant le point* K *de Lemoine commun à ces deux triangles.*

Le triangle MNP nous paraît curieux à d'autres points de vue. Soit ω′ le centre de son cercle circonscrit. Les droites Mω′, Nω′, Pω′ sont respectivement symétriques des hauteurs MM′, NN′, PP′ par rapport aux bissectrices intérieures des angles M, N, P. Soient C'_1, B'_1, A'_1 les points où ces rayons coupent respectivement les côtés AB, CA, CB du triangle ABC.

On a, par exemple, visiblement

$$\frac{\beta' C'_1}{C'_1 \alpha} = \frac{\sin A \cos A}{\sin B \cos B} = \frac{a \cos A}{b \cos B} = \frac{B' C'}{C' A'} = \frac{\beta' C'}{C' \alpha},$$

et C'_1 n'est autre que le pied de la hauteur CC′ du triangle ABC.

Par suite, MC′ parallèle à CO passe par l'orthocentre ω du triangle A′B′C′. D'où ce théorème que nous croyons remarquable parce qu'alors le triangle MNP est tout à fait analogue à celui A′B′C′ que nous avons étudié (*Nouvelles Annales*, mai 1915 : *Sur quatre triangles homothétiques*), et la figure possède toutes les propriétés que nous y avons données :

Dans un triangle ABC, *des pieds* A′, B′, C′ *des hau-*

teurs on abaisse les perpendiculaires qui rencontrent respectivement les côtés du triangle en $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$. *Les droites* $\beta'\gamma, \gamma'\alpha, \alpha'\beta$ *déterminent un triangle* MNP *inversement semblable au triangle* ABC *qui a même point de Lemoine* K *et dont le centre du cercle circonscrit est l'orthocentre* ω *du triangle orthique* A′B′C′ *de* ABC.

En particulier, si r' est le rayon du cercle inscrit au triangle A′B′C′, le rapport d'homothétie des triangles MNP et ABC est

$$1 + \frac{r'}{R},$$

expression qui peut se mettre sous les formes

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C - 1 = \frac{5R^2 - \overline{OH}^2}{4R^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1.$$

Dans notre Mémoire précédemment cité, nous avons établi, page 209, ce théorème :

Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit O, *le point* K *de Lemoine, l'orthocentre* ω *du triangle orthique et le centre de gravité du périmètre de ce dernier triangle, sont quatre points en ligne droite.*

Nous pouvons maintenant préciser la position du point de Lemoine sur la droite $O\omega$:

Dans un triangle ABC *le point de Lemoine* K *partage le segment de droite* $O\omega$ *qui joint le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre du triangle orthique* A′B′C′ *dans le rapport*

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1.$$

Nous reviendrons sur ce rapport par la suite.

Entre autres propriétés de la figure on peut ajouter que *les milieux des côtés du triangle orthique* $A'B'C'$ *sont également ceux des droites* R_aS_a, R_bS_b, R_cS_c, R_a, S_a, R_b, S_b, R_c, S_c *étant respectivement les points où* $C'B'$, $B'A'$, $A'C'$ *rencontrent* PM *et* NP, MN *et* NP, MN *et* PM.

Enfin, *l'orthocentre* H' *du triangle* MNP, *le point* K *de Lemoine de* ABC *et l'orthocentre* H *de* ABC *sont trois points en ligne droite*, *et*

$$\frac{KH}{H'K} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} - 1.$$

3. M. Naraniengar a proposé dans *Mathesis*, avril 1913, sous le n° **1916**, la question suivante dont il n'était pas parvenu de solution en 1914 :

Trouver le lieu du point de Lemoine d'un triangle variable inscrit à un cercle fixe et ayant son centre de gravité en un point donné.

Soient ABC le triangle, O le centre du cercle circonscrit de rayon R et G le point de concours des médianes.

La droite OG étant fixe contient comme l'on sait l'orthocentre H de ABC qui est aussi un point fixe tel que $GH = 2\,OG$. De plus un tel triangle ABC, variable dans un cercle fixe O et ayant pour orthocentre un point donné H, a la somme des carrés de ses côtés constante.

Le centre O' du cercle d'Euler de ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle orthique $A'B'C'$ dont le centre du cercle inscrit est H. La relation d'Euler donne

$$\text{const.} = \overline{O'H}^2 = d^2 = \frac{R^2}{4} - Rr',$$

d'où

$$r' = \frac{4d^2 - R^2}{4R} = \text{const.},$$

r' étant le rayon du cercle inscrit à $A'B'C'$.

La question revient donc à trouver le lieu du point K de $O\omega$, tel que

$$(2)\qquad \frac{OK}{K\omega} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} - 1 = \text{const.},$$

lorsque le triangle $A'B'C'$ varie tout en étant inscrit au cercle fixe O' de rayon $\frac{R}{2}$ et circonscrit au cercle fixe H de rayon r'.

Le lieu de ω est connu (¹); il est homothétique à un arc de circonférence de centre H et de rayon $\left(\frac{R}{2} - r'\right)$, le centre d'homothétie étant O' et le rapport 2.

Par suite, le lieu de K est aussi un arc de circonférence homothétique à celui que décrit ω, le centre étant O et le rapport (2) précédent.

4. Nous terminerons cette Note par une intéressante propriété des triangles ABC et $A''B''C''$ (*fig.* 2).

Les deux triangles sont homologiques et le centre d'homologie est le point K *de Lemoine commun à* ABC *et* MNP.

Soient α_1 le point d'intersection de BC et $B''C''$ et β_1, γ_1 les points analogues.

Le quadrilatère $BC\alpha'\alpha$, par exemple, ayant deux côtés opposés BC et $\alpha'\alpha$ antiparallèles dans l'angle A, est inscriptible, et

$$\alpha_1\alpha' \times \alpha_1\alpha = \alpha_1 C \times \alpha_1 B.$$

(¹) *Journal de Vuibert*, 33ᵉ année, p. 155.

α_1 est donc un point de l'axe radical du cercle O circonscrit à ABC et du cercle α, α', β, β', γ, γ', c'est-à-dire du cercle Ω de Taylor de ABC. Par conséquent :

Le triangle ABC *et le triangle médian* A″B″C″ *de son triangle orthique* A′B′C′ *sont homologiques, le centre étant le point de Lemoine du triangle* ABC ; *l'axe d'homologie est l'axe radical des cercles circonscrit et de Taylor relatifs à* ABC. *Cet axe d'homologie est perpendiculaire à la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle* ABC.

Au triangle MNP correspond un triangle orthique M′N′P′ ayant M″N″P″ pour triangle médian. La propriété précédente est évidemment vraie pour les triangles MNP et M″N″P″ qui sont homologiques, K étant le centre et l'axe d'homologie Δ étant l'axe radical des cercles ω circonscrit et Ω' de Taylor relatifs à MNP.

Cet axe d'homologie est également perpendiculaire à la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du triangle ABC.