

R. GOORMAGHTIGH

V. THÉBAULT

Sur une question de Mannheim et ses applications à la géométrie du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16 (1916), p. 104-121

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__104_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K'2e]

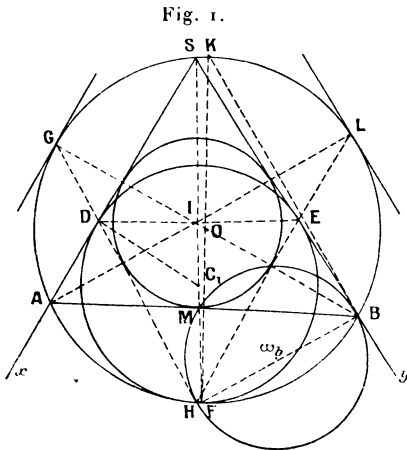
**SUR UNE QUESTION DE MANNHEIM ET SES APPLICATIONS
A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ;**

PAR MM. R. GOORMAGHTIGH ET V. THÉBAULT.

1. Mannheim a proposé la question suivante :

On donne un angle xSy et un cercle inscrit C . Une tangente à ce cercle détermine un triangle ASB . Le cercle ASB reste tangent à un cercle fixe C_1 lorsque la tangente AB varie.

Desboves (*Questions de Géométrie élémentaire*, 2^e édition, p. 244) indique l'inversion comme mode de



démonstration. On y arrive aussi en utilisant la réciproque du théorème sur l'hexagone de Pascal (*fig. 1*).

A priori, le cercle C_1 , s'il existe, est tangent à Sx

et à Sy ; considérons donc le cercle C_1 qui est tangent à Sx , à Sy et au cercle ASB ; soient D, E, H les points de contact. Par homothétie, si l'on trace HDG , la tangente en G est parallèle à SA et BG est bissectrice de l'angle SBA ; de même, AL est bissectrice de l'angle SAB ; ces droites se coupent donc au centre I du cercle C , point donné. L'hexagone de Pascal $ASBGHLA$ donne alors D, E, I en ligne droite, de sorte que DE est la perpendiculaire en I à SI . Le cercle C_1 est donc fixe.

Cette démonstration a l'avantage de ne pas supposer connue d'avance la position du point C_1 . Si l'on suppose connue la position du cercle C_1 , la vérification peut du reste se faire d'une manière élémentaire.

La droite DE étant perpendiculaire à SI en I , la droite DC_1 étant perpendiculaire à Sx , il suffit de prouver que

$$R - C_1D = OC_1,$$

R étant le rayon du cercle O , ou

$$R^2 - 2R \times C_1D + \overline{C_1D}^2 = \overline{OC_1}^2,$$

ou

$$R^2 - \overline{OC_1}^2 = 2R \times C_1D - \overline{C_1D}^2,$$

ou finalement

$$C_1S \times FB = FK \times C_1D,$$

soit

$$\frac{C_1S}{C_1D} = \frac{FK}{FB},$$

ce qui est évident.

Nous trouvons aussi dans le *Journal de Vuibert*, 1900, page 4, un sujet analogue :

On donne un cercle O et deux cordes MA, MB ; dans l'angle AMB on inscrit un cercle tangent en C et D aux côtés MA, MB et touchant également le

cercle O. Enveloppe de la droite CD lorsque, les points A, B restant fixes, le point M décrit le cercle O.

Ainsi la proposition de Mannheim et celle du *Journal de Vuibert* nous conduisent au résultat suivant :

Soient un triangle ABC et I le centre du cercle inscrit. La perpendiculaire en I à IA rencontre les deux côtés de l'angle A en des points T_a et la perpendiculaire à AB en T_a rencontre AI en A' . Le cercle de centre A' et de rayon $A'T_a$ est tangent au cercle O circonscrit à ABC.

C'est ainsi rédigée, que M. H. Brocard a bien voulu nous signaler la question comme étant susceptible de donner des résultats intéressant la géométrie du triangle.

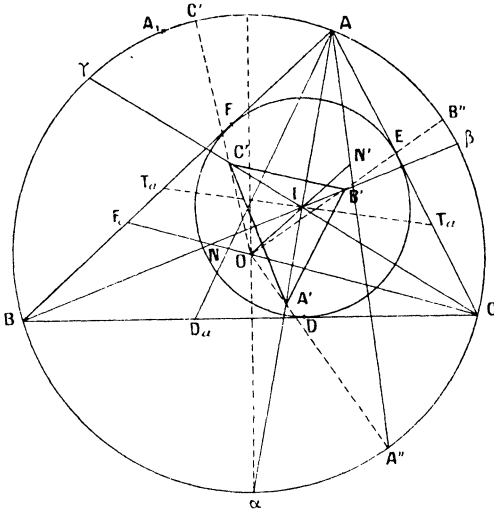
2. Revenons à la question même de Mannheim. En considérant deux positions infiniment voisines de AB, on voit que *le point de contact H du cercle O avec son enveloppe est sur le cercle tangent à SA en A et passant par le contact M de AB avec le cercle inscrit I et sur le cercle tangent à SB en B et passant en M.*

Cette propriété est fondamentale pour ce qui va suivre.

3. Considérons maintenant un triangle ABC. Soient I, O les centres des cercles inscrit et circonscrit de rayons r et R ; T_a, T_b, T_c les intersections des perpendiculaires en I à IA, IB, IC respectivement avec les côtés du triangle ABC; A', B', C' les centres des cer-

cles qui touchent le cercle O et les côtés du triangle respectivement en T_a, T_b, T_c ; A'', B'', C'' les contacts de ces cercles avec le cercle O ; D, E, F ceux du cercle inscrit I avec BC, CA, AB ; $D_a, E_a, F_a, D_b, E_b, F_b, D_c,$

Fig. 2.



E_c, F_c les points analogues pour les cercles exinscrits I_a, I_b, I_c .

Le cercle ω circonscrit au triangle CDA'' touchant AC en G ,

$$\text{angle } DA''C = \text{angle } B.$$

Donc $A''D$ rencontre le cercle O au point A_1 symétrique de A par rapport à $O\alpha$, et

Les points de contact A'', B'', C'' du cercle O et des cercles A', B', C' sont situés sur les droites $A_1D, B_1E, C_1F, A_1, B_1, C_1$ étant les symétriques des sommets A, B, C par rapport aux médiatrices du triangle ABC .

Les triangles A_1CD et $A_1A''C$ étant semblables, il en est de même de $A_1A''C$ et ABD_a . Par conséquent

$$\text{angle } A''AC = \text{angle } BAD_a,$$

et AA'' est symétrique de AD_a par rapport à la bissectrice AI .

De même BB'' et BE_b , CC'' et CF_c sont respectivement symétriques par rapport aux bissectrices BI et CI .

Il s'ensuit que les trois droites AA'' , BB'' , CC'' sont concourantes en un point N' qui est l'inverse triangulaire du point N de Nagel du triangle ABC . Ce point N' est situé sur la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit.

On en déduit aussitôt cette propriété :

Les triangles ABC et $A''B''C''$ sont homologues. Le centre N' d'homologie est l'inverse du point de Nagel relatif au triangle ABC et la polaire Δ de ce point par rapport au cercle O , perpendiculaire sur IO , est l'axe d'homologie de ces deux triangles.

4. On peut encore donner au moyen de l'inversion une démonstration simple de ce théorème. Soient E_a , F_a les points de contact du cercle I_a exinscrit dans l'angle A avec les côtés AC et AB , r_a le rayon de ce cercle. Par le pied de la bissectrice de l'angle A menons la seconde tangente au cercle I_a ; elle coupe les côtés AC et AB en P et Q et touche le cercle I_a en un point D'_a . Transformons la figure par inversion, le pôle étant le sommet A , la puissance $CA \times AB = bc$. Le cercle ABC est le transformé de PQ ; le cercle Γ_a de centre A' , de rayon $A'T_a$ a pour transformé le cercle I_a , car on a

$$AE_a \times AT_a = \frac{pr}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{2S}{\sin A} = bc.$$

Par conséquent, le cercle Γ_a touche le cercle ABC en un point A'' , situé sur la droite AD'_a symétrique de la droite AD_a par rapport à la bissectrice de l'angle A.

5. $B'C'$, par exemple, rencontre BC en S, centre de similitude externe des cercles B' et C' . Mais ces cercles touchent aussi le cercle O en B'' et C'' ; donc $B''C''$ passe aussi en S et les trois droites BC, $B'C'$, $B''C''$ sont concourantes. Alors :

Les triangles ABC et $A'B'C'$, $A'B'C'$ et $A''B''C''$ forment deux groupes de triangles homologues. Les centres d'homologie sont les centres I et O des cercles inscrit et circonscrit à ABC. L'axe d'homologie Δ commun à ces deux groupes de triangles est le même que précédemment, c'est-à-dire une droite perpendiculaire à la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit.

6. On peut aisément démontrer analytiquement ces propriétés en prenant le triangle ABC pour triangle de référence. Désignons par ξ , η , ζ les coordonnées normales de A' et par r le rayon du cercle inscrit. On a d'une part

$$\eta = \zeta = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}.$$

La coordonnée ξ résulte ensuite de la relation

$$a\xi + \frac{(b+c)r}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 2S.$$

On déduit de là que les coordonnées normales rela-

tives de ce point sont

$$a - 2p \sin^2 \frac{A}{2}, \quad a, \quad a,$$

ou encore

$$1 - \frac{p}{2R} \operatorname{tang} \frac{A}{2}, \quad 1, \quad 1.$$

Par analogie, celles de B' et C' s'écrivent

$$\begin{aligned} 1, \quad 1 - \frac{p}{2R} \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \quad 1 \\ 1, \quad 1, \quad 1 - \frac{p}{2R} \operatorname{tang} \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

L'équation qui donne les coordonnées relatives du point d'intersection S de BC et $B'C'$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ 1 & 1 - \frac{p}{2R} \operatorname{tang} \frac{B}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \frac{p}{2R} \operatorname{tang} \frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{y}{\operatorname{tang} \frac{B}{2}} + \frac{z}{\operatorname{tang} \frac{C}{2}} = 0.$$

L'équation de l'axe d'homologie Δ des triangles ABC et $A'B'C'$ est donc

$$(1) \quad \frac{x}{\operatorname{tang} \frac{A}{2}} + \frac{y}{\operatorname{tang} \frac{B}{2}} + \frac{z}{\operatorname{tang} \frac{C}{2}} = 0.$$

L'axe d'homologie Δ est la polaire trilinéaire du point $\left(\operatorname{tang} \frac{A}{2}, \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \operatorname{tang} \frac{C}{2} \right)$.

On peut encore écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad \Sigma(p - a)x = 0.$$

On voit que l'axe Δ passe par le point d'intersection des droites $\Sigma x = 0$ et $\Sigma ax = 0$. Ces équations représentent respectivement la droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures et la droite de l'infini, l'axe Δ est donc parallèle à la première de ces droites. Au moyen de l'équation (2), on voit aisément que son pôle, par rapport au cercle ABC, est le point

$$\left(\frac{a}{p-a}, \frac{b}{p-b}, \frac{c}{p-c} \right),$$

c'est-à-dire *l'inverse du point de Nagel*.

7. Le triangle formé par les inverses triangulaires A_2, B_2, C_2 des points A', B', C' est aussi homologique au triangle ABC. L'équation qui donne les coordonnées du point d'intersection de la droite B_2C_2 avec BC est

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ 1 & \frac{1}{1 - \frac{p}{2R} \tan \frac{B}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{1 - \frac{p}{2R} \tan \frac{C}{2}} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{2R}{p} \cot \frac{B}{2} - 1 \right) y + \left(\frac{2R}{p} \cot \frac{C}{2} - 1 \right) z = 0.$$

L'axe d'homologie des triangles ABC, $A_2B_2C_2$ a donc pour équation

$$\frac{2R}{p} \Sigma x \cot \frac{A}{2} - \Sigma x = 0.$$

Il résulte de là que cet axe passe par l'intersection de la droite (1) avec celle qui joint les pieds des bissectrices extérieures. On a donc ce théorème :

L'axe d'homologie du triangle ABC et de celui

formé par les inverses des points A' , B' , C' est aussi perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC .

8. La démonstration, au moyen de l'inversion, utilisée au paragraphe 4, montre qu'il existe également trois cercles A'_1, B'_2, C'_3 dont les centres sont situés sur les bissectrices AI, BI, CI et qui touchent extérieurement le cercle circonscrit O à ABC . Soient A''_1, B''_2 et C''_3 les points de contact.

Le cercle $BD_a A''_1$ est tangent à AB en B . Les propriétés de A''_1 sont analogues à celles du point A' précédent, et AA''_1 est symétrique de AD par rapport à la bissectrice AI . De même BB''_2, CC''_3 sont respectivement symétriques de BE et CF par rapport aux bissectrices BI et CI .

Les trois droites AA''_1, BB''_2, CC''_3 concourent donc au point J' inverse triangulaire du point J de Gergonne du triangle ABC . Ce point est situé sur la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit.

D'où cette propriété :

Les triangles $ABC, A'_1 B'_2 C'_3, A''_1 B''_2 C''_3$ sont homologues entre eux, les centres d'homologie étant respectivement I, J' inverse triangulaire du point de Gergonne de ABC , et O . L'axe d'homologie est la polaire de J' par exemple par rapport au cercle O , c'est-à-dire la droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures. Cette droite est aussi perpendiculaire à la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit à ABC .

9. Comme au paragraphe 6, on voit facilement que

les coordonnées normales relatives des points A'_1 , B'_2 et C'_3 sont

$$\begin{array}{ccc} -a - 2(p-a)\sin^2\frac{A}{2}, & a, & a, \\ b, & -b - 2(p-b)\sin^2\frac{B}{2}, & b, \\ c, & c, & -c - 2(p-c)\sin^2\frac{C}{2}. \end{array}$$

L'équation qui donne les coordonnées du point d'intersection S' des droites BC et $B'_2C'_3$, est

$$(3) \left[bc - b(p-c)\sin^2\frac{C}{2} \right] y + \left[bc - c(p-b)\sin^2\frac{B}{2} \right] z = 0.$$

Or

$$(4) \quad b(p-c)\sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{a}(p-a)(p-b)(p-c) \\ = c(p-b)\sin^2\frac{B}{2}.$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$y + z = 0.$$

L'axe d'homologie des triangles ABC , $A'_1B'_2C'_3$ est donc la droite $\Sigma x = 0$, qui joint les pieds des bissectrices extérieures.

On retrouve donc les résultats du précédent paragraphe.

10. Cherchons maintenant, comme au paragraphe 7, l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle $A_3B_3C_3$ formé par les inverses triangulaires des points A'_1 , B'_2 , C'_3 . Les coordonnées du point d'intersection de B_3C_3 avec le côté BC sont données par l'équa-

tion

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ 1 & -\frac{1}{1 + \frac{2}{b}(p-b)\sin^2\frac{B}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{1 + \frac{2}{c}(p-c)\sin^2\frac{C}{2}} \end{vmatrix} = 0.$$

On voit aisément, en la développant et en tenant compte de la relation (4), qu'on peut encore l'écrire

$$y + z = 0.$$

La droite qui joint les pieds des bissectrices extérieures est aussi l'axe d'homologie du triangle fondamental et du triangle formé par les inverses des points A'_1, B'_2, C'_3 .

11. Il existe d'ailleurs entre les points A'_1, B'_2, C'_3 et leurs inverses A_3, B_3, C_3 une relation géométrique simple, qui permet de déduire le théorème qui précède de considérations élémentaires. Désignons par T_b le point où la perpendiculaire élevée en I_b , sur la bissectrice de l'angle B, coupe le côté AB. On a

$$AT_b = \frac{p}{\cos^2\frac{B}{2}} - c$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \cot T_b A B'_2 &= \frac{1}{r_b} \left(p - c \cos^2 \frac{B}{2} \right) \\ &= \frac{1}{r_b} \left[p - \frac{p(p-b)}{a} \right] = \frac{p(p-c)}{a r_b}. \end{aligned}$$

Si l'on appelle T_c le point où la perpendiculaire élevée en I_c sur la bissectrice de l'angle C rencontre le

côté AC, on a de même

$$\cot T_c \wedge AC'_3 = \frac{p(p-b)}{ar_c} = \frac{p(p-c)}{ar_b}.$$

Les droites AB'_2 et AC'_3 sont donc isogonales par rapport à l'angle A.

Les droites BC'_3 et CB'_2 , CA'_1 et AC'_3 , AB'_2 et BA'_1 se coupent sur les bissectrices des angles A, B, C en des points qui sont les inverses de A'_1 , B'_2 , C'_3 .

12. D'autres propositions peuvent aussi être obtenues en utilisant les propriétés des centres de similitude de trois cercles donnés.

Ainsi considérons les cercles O, I et A'. Leurs centres de similitude externes sont en ligne droite; ces centres étant visiblement un point N'_1 de OI, A'' et A.

Les contacts du cercle O et des cercles A', B', C' sont situés sur les droites qui joignent respectivement les sommets au centre de similitude externe des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC.

Comme ces droites AA'', BB'', CC'' se coupent déjà en N' , inverse triangulaire du point N de Nagel de ABC, nous obtenons cette proposition remarquable :

Dans un triangle ABC, l'inverse triangulaire du point de Nagel est le centre de similitude externe S des cercles inscrit et circonscrit.

La considération des cercles A'_1 , B'_2 , C'_3 et I_a , I_b , I_c donne à son tour ce théorème :

Dans un triangle ABC, l'inverse triangulaire J' du point de Gergonne est le centre de similitude interne S' des cercles inscrit et circonscrit.

On montre facilement, en considérant le cercle circonscrit O , le cercle d'Euler ω et le cercle inscrit I à un triangle ABC dont l'orthocentre est H et le centre de gravité G , que les droites HS et GS' passent au point φ de Feuerbach du triangle ABC . Cette propriété peut donc être mise sous la forme suivante :

Dans un triangle ABC , les droites qui joignent respectivement les inverses N' et J' des points de Nagel et de Gergonne à l'orthocentre et au centre de gravité passent au point φ de Feuerbach du triangle.

13. Si l'on transforme par inversion le cercle inscrit, le centre d'inversion étant le sommet A , la puissance bc , on obtient le cercle A'_1 . Le cercle transformé du cercle des neuf points passe par les symétriques de A par rapport à P et Q (§ 4) et par le point diamétralement opposé à A sur le cercle APQ . Par conséquent, le cercle homothétique du cercle A'_1 par rapport à A , pour le rapport d'homothétie $1 : 2$, est tangent au cercle qui passe par P, Q et le centre O' du cercle APQ ; le point de contact appartient à la droite qui joint le sommet A au point φ de Feuerbach du triangle ABC . Si l'on observe que les cercles $PO'Q$ et BOC sont symétriques par rapport à AI , on déduit aisément de ce qui précède le théorème suivant :

Les cercles homothétiques des cercles A'_1, B'_2, C'_3 par rapport à A, B, C , pour le rapport d'homothétie $1 : 2$, sont respectivement tangents aux cercles BOC, COA, AOB . Le triangle des points de contact est homologique au triangle ABC , le centre d'homologie étant l'inverse du point de Feuerbach de ABC .

14. Calculons le rapport $IA' : IA'_1$, on a

$$IA' = IA \tan^2 \frac{A}{2},$$

$$IA'_1 = II_a + I_a A'_1 = IA \left(\frac{p}{p-a} \tan^2 \frac{A}{2} + \frac{a}{p-a} \right).$$

Par conséquent, le rapport considéré a pour expression

$$\frac{p-a}{p+a \cot^2 \frac{A}{2}} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-b)(p-c) + ap(p-a)} = \frac{r^2}{2\Sigma bc - \Sigma a^2}.$$

Cette valeur étant symétrique par rapport à a, b, c , il en résulte qu'on trouverait pour les rapports $IB' : IB'_1$, $IC' : IC'_1$ des valeurs identiques.

Les triangles $A'B'C'$ et $A'_1B'_1C'_1$ sont homothétiques par rapport au centre du cercle inscrit.

15. Soit L le milieu de l'arc BC du cercle circonscrit. Cherchons la puissance de ce point par rapport au cercle C' . Si l'on désigne par R le point où la perpendiculaire élevée en I sur IC rencontre le côté BC , et si l'on observe que l'angle $C'IL$ vaut $\left(90^\circ + \frac{B}{2}\right)$, on a pour l'expression de cette puissance

$$\begin{aligned} \overline{LC'}^2 - \overline{C'R}^2 &= \overline{IC'}^2 + \overline{IL}^2 + 2IC' \cdot IL \sin \frac{B}{2} - \overline{C'R}^2 \\ &= \overline{IL}^2 + 2IC' \cdot IL \sin \frac{B}{2} - \overline{IR}^2 \\ &= \overline{IL}^2 + \frac{r}{\cos^2 \frac{C}{2}} \left(4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - r \right) = \overline{IL}^2. \end{aligned}$$

On trouverait pour la puissance de L par rapport au cercle B' une valeur identique, de là ce théorème :

Les groupes des cercles A' et B' , B' et C' , C' et A'

sont respectivement orthogonaux aux cercles BIC, CIA, AIB.

16. Le point L appartient à l'axe radical des cercles B' et C'; ses coordonnées s'écrivent

$$-\frac{a}{b+c}, \quad 1, \quad 1.$$

D'autre part, on trouve aisément que les coordonnées du point de contact du cercle B' avec BC sont

$$0, \quad a \sin C - \frac{2cr}{b}, \quad 2r;$$

celles du point de contact du cercle C' avec BC sont de même

$$0, \quad 2r, \quad a \sin B - \frac{2br}{c}.$$

On en déduit, pour les coordonnées du milieu de la distance de ces deux points,

$$0, \quad \frac{1}{b}(p+b-c), \quad \frac{1}{c}(p-b+c).$$

L'axe radical des cercles B' et C' a donc pour équation $(p-a)(b^2-c^2)x - ab(p-b+c)y + ac(p+b-c)z = 0$.

Les équations des axes radicaux des cercles C' et A', A' et B' s'écrivent de même

$$ab(p-a+c)x + (p-b)(c^2-a^2)y - bc(p+a-c)z = 0, \\ ac(p-a+b)x - bc(p+a-b)y - (p-c)(a^2-b^2)z = 0.$$

Par conséquent, le centre radical S des cercles A', B', C' a pour coordonnées

$$\frac{2a(p-b)(p-c) + abc, \\ 2b(p-c)(p-a) + abc, \quad 2c(p-a)(p-b) + abc,}{2a(p-b)(p-c) + abc + 2b(p-c)(p-a) + abc + 2c(p-a)(p-b) + abc},$$

ou

$$2 - \cos A, \quad 2 - \cos B, \quad 2 - \cos C.$$

Ce point S appartient donc à la droite OI.

Le centre radical des cercles A', B', C' appartient à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC.

17. On démontre comme au paragraphe 15 que la puissance du point L', diamétralement opposé à L sur le cercle ABC, par rapport aux cercles B'₂ et C'₃, est $\overline{I_b L'}^2$.

Les groupes de cercles B'₂ et C'₃, C'₃ et A'₁, A'₁ et B'₂ sont respectivement orthogonaux aux cercles I_bBCI_c, I_cCAI_a, I_aABI_b.

Comme les triangles A'B'C' et A'₁B'₂C'₃ sont homothétiques, l'axe radical des cercles B' et C' est parallèle à celui des cercles B'₂ et C'₃; de plus ces axes radicaux sont symétriques par rapport à O, puisque le premier passe par L, le second par L'.

Les axes radicaux des cercles A', B', C' pris deux à deux et ceux des cercles A'₁, B'₂, C'₃ pris deux à deux sont symétriques les uns des autres par rapport au centre du cercle circonscrit à ABC.

On en déduit que le centre radical des cercles A'₁, B'₂, C'₃ est le symétrique de S par rapport à O.

Le centre radical des cercles A'₁, B'₂, C'₃ appartient à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit, et est le symétrique du centre radical des cercles A', B', C' par rapport au centre du cercle circonscrit.

Enfin les axes radicaux des cercles B' et C', C' et A',

A' et B' passent respectivement par les sommets du triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit à ABC en A'' , B'' , C'' .

Le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle tangentiel au triangle $A''B''C''$; le triangle $A'_1B'_2C'_3$ est orthologique au triangle tangentiel du triangle $A''_1B''_2C''_3$.

18. Nous terminerons cette étude par quelques propriétés plus spéciales de la figure, qui pourra peut-être encore donner d'autres curiosités.

1° Les rayons des cercles A' , B' , C' sont respectivement

$$\rho_a = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}}, \quad \rho_b = \frac{r}{\cos^2 \frac{B}{2}}, \quad \rho_c = \frac{r}{\cos^2 \frac{C}{2}}.$$

Les cercles ω_a , ω_b , ω_c (*fig. 1*) ont à leur tour pour rayons respectifs

$$\rho'_a = \frac{p-a}{2 \sin A}, \quad \rho'_b = \frac{p-b}{2 \sin B}, \quad \rho'_c = \frac{p-c}{2 \sin C}.$$

En remarquant que

$$AT_a = \frac{2r}{\sin A}, \quad BT_b = \frac{2r}{\sin B}, \quad CT_c = \frac{2r}{\sin C},$$

on a par exemple

$$\rho_a \times \rho'_a = \frac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}} \frac{p-a}{2 \sin A} = \frac{r^2}{\sin^2 A} = \frac{\overline{AT_a}^2}{4}.$$

Donc les deux cercles A' et ω_a sont tangents extérieurement; il en est de même des cercles B' et ω_b , C' et ω_c , ainsi que des cercles A'_1 , B'_2 , C'_3 et ω'_a , ω'_b , ω'_c . D'où cette propriété :

Les cercles A', B', C' sont respectivement tangents aux groupes de deux cercles $\omega_a, \omega_b, \omega_c$; les cercles A'_1, B'_2, C'_3 sont respectivement tangents aux groupes de deux cercles $\omega'_a, \omega'_b, \omega'_c$.

2° Les cercles A' et C' par exemple touchent le côté CA en T_a et T_c tels que

$$\frac{AT_a}{CT_c} = \frac{2r \sin A}{2r \sin C} = \frac{a}{c}.$$

Les contacts de ces cercles avec les côtés AB et BC sont donc tels que la droite T_aT_c est parallèle au côté CA du triangle. De plus cette droite est tangente au cercle inscrit I à ABC, car par exemple

$$\frac{BT_c}{BC} = \frac{a(p-b)}{ap} = \frac{p-b}{p} = \frac{h-2r}{h}.$$

D'où cette curieuse propriété :

Les six points T_a, T_b, T_c de contact des cercles A', B', C', respectivement avec les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, sont les sommets d'un hexagone circonscrit au cercle I et dont les côtés sont parallèles et égaux deux à deux.