

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 563-580

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__563_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

585.

(1861, p. 140.)

Trois coniques étant données dans un même plan, il y a 20 points d'où elles sont vues sous le même angle ou sous des angles supplémentaires.

FAURE.

SOLUTION

Par un Abonné.

Soient

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

les équations des trois coniques données;

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0$$

celles de leurs cercles orthoptiques.

Désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les déterminants des trois coniques.

L'angle sous lequel on voit la conique $f_1 = 0$, d'un point (x, y) de son plan, est donné par la formule (SALMON, *Sect. con.*, p. 270).

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2\sqrt{-\Delta_1 f_1(x, y)}}{C_1}$$

Par suite le lieu des points d'où l'on voit les coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ sous le même angle a pour équation

$$\Delta_1 f_1(x, y) C_2^2 - \Delta_2 f_2(x, y) C_1^2 = 0.$$

C'est une courbe du sixième degré qui admet les points cycliques comme points doubles. Elle touche les coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ aux points où elles sont respectivement coupées par leurs cercles orthoptiques.

De même, le lieu des points, d'où l'on voit sous le même angle les coniques $f_1 = 0$, $f_3 = 0$, est fourni par l'équation

$$\Delta_1 f_1(x, y) C_3^2 - \Delta_3 f_3(x, y) C_1^2 = 0.$$

Les deux courbes précédentes se coupent en trente-six points dont huit sont confondus avec les points cycliques et huit sur la conique $f_1 = 0$. Il en reste vingt qui répondent à la question.

1510.

(1879, p. 288.)

Déduire d'une même identité une infinité de solutions en nombres entiers de chacun des deux systèmes :

$$(I) \quad \begin{cases} X^3 + Y^3 + Z^3 = T^3 + U^3 + V^3, \\ XYZ = TUV. \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} A^3 + B^3 + C^3 = D^3 + E^3 + F^3, \\ A + B + C = D + E + F. \end{cases}$$

DESBOVES.

SOLUTION

Par M. A. GERARDIN.

Plusieurs questions de ce genre proposées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* m'ont donné l'occasion d'obtenir, depuis plusieurs années, une infinité de solutions par une méthode absolument générale.

L'exposé de ces procédés a fait l'objet de plusieurs articles du Journal précité et du *Sphinx-OEdipe*, et je compte y revenir avec détails pour bien montrer la grande généralité de ma méthode universelle.

Voici d'abord quelques *identités* choisies parmi mes résultats généraux, en admettant des entiers négatifs :

$$\begin{aligned} X &= p^2(p^3 + 2q^3); & T &= pq(p^2 + 2q^3); \\ Y &= -pq(q^3 + 2p^3); & U &= -q^2(q^3 + 2p^3); \\ Z &= q^2(p^3 - q^3); & V &= p^2(p^3 - q^3). \end{aligned}$$

Exemple : $p = 2, q = 1$.

$$\begin{aligned} 40^3 + 7^3 - 34^3 &= 28^3 + 20^3 - 17^3, \\ -40.7.34 &= -28.20.17. \end{aligned}$$

Je citerai encore pour ce cas :

$$\begin{aligned} X &= p(p^3 + q^3 - 2r^3); & T &= q(p^3 + q^3 - 2r^3); \\ Y &= q(q^3 + r^3 - 2p^3); & U &= r(q^3 + r^3 - 2p^3); \\ Z &= r(p^3 + r^3 - 2q^3); & V &= p(p^3 + r^3 - 2q^3). \end{aligned}$$

Exemple : $p = 3, q = 2, r = 1$.

$$\begin{aligned} 33^3 + 4^3 - 30^3 &= 22^3 + 12^3 - 15^3, \\ -33.4.30 &= -22.12.15. \end{aligned}$$

J'ai obtenu de nombreuses identités de degrés divers, donnant des nombres positifs, avec certaines conditions de limites; ainsi, avec $3f^3 < g^3 < 9f^3$,

$$\begin{aligned} X &= 9f^4 g(g^3 + 9f^3); & T &= 3fg^4(3f^3 + g^3); \\ Y &= -9f^2(3f^3 + g^3)(3f^3 - g^3); & U &= -27f^5(3f^3 - g^3); \\ Z &= g^5(9f^3 - g^3); & V &= g^2(g^3 + 9f^3)(9f^3 - g^3); \end{aligned}$$

conséquence de mes résultats de 1906.

Exemple : $f = 1, g = 2$.

$$\begin{aligned} 495^3 + 306^3 + 32^3 &= 528^3 + 135^3 + 68^3, \\ 495.306.32 &= 528.135.68. \end{aligned}$$

Enfin, la *méthode visuelle* m'a indiqué le procédé suivant, qui répond entièrement à la demande de Desboves.

Si l'on a une solution particulière ou générale

$$h^3 + k^3 = l^3 + n^3,$$

on aura aussi plusieurs identités semblables à la suivante :

$$\begin{aligned} (n^2)^3 + (kl)^3 + (hl)^3 &= (hn)^3 + (kn)^3 + (l^2)^3, \\ n^2.kl.hl &= hn.kn.l^2, \end{aligned}$$

dont nous avons des solutions générales du huitième degré.

Exemple :

$$\begin{aligned} 120^3 + 81^3 + 10^3 &= 108^3 + 100^3 + 9^3, \\ 120.81.10 &= 108.100.9. \end{aligned}$$

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XV. (Déc. 1915.)

J'ai indiqué en 1910 le système suivant :

$$\begin{aligned} A &= 2p^2 - 9pq + 6q^2; & D &= -p^2 + 9pq - 12q^2; \\ B &= 2pq; & E &= 2p^2 - 10pq + 12q^2; \\ C &= pq; & F &= p^2 - 5pq + 6q^2. \end{aligned}$$

Exemple : $p = 5, q = 1$.

$$\begin{aligned} 11^3 + 10^3 + 5^3 &= 12^3 + 8^3 + 6^3, \\ 11 + 10 + 5 &= 12 + 8 + 6. \end{aligned}$$

Je donnerai, pour terminer, une solution générale du système simultané :

$$\begin{aligned} G^3 + H^3 + K^3 &= L^3 + M^3 + N^3, \\ G + H + K &= L + M + N, \\ GHK &= LMN \end{aligned}$$

en entiers différents :

$$\begin{aligned} G &= p(pq - r^2); & L &= q(pq - r^2); \\ H &= q(qr - p^2); & M &= r(qr - p^2); \\ K &= r(pr - q^2); & N &= p(pr - q^2). \end{aligned}$$

Exemple : $p = 3, q = 2, r = 1$.

$$\begin{aligned} 15^3 - 14^3 - 1^3 &= 10^3 - 7^3 - 3^3, \\ 15 - 14 - 1 &= 10 - 7 - 3, \\ 15 \cdot 14 \cdot 1 &= 10 \cdot 7 \cdot 3. \end{aligned}$$

Comme cas particulier, je citerai enfin :

$$\begin{aligned} G &= 2a^2 - 4ab; & L &= ab - 2b^2; \\ H &= 4ab - b^2; & M &= 2b^2 - 4a^2; \\ K &= b^2 - 2a^2; & N &= 4a^2 - ab. \end{aligned}$$

Exemple : $a = 4, b = 1$.

$$\begin{aligned} 16^3 + 15^3 - 31^3 &= -62^3 + 60^3 + 2^3, \\ 16 + 15 - 31 &= -62 + 60 + 2, \\ -16 \cdot 15 \cdot 31 &= -62 \cdot 60 \cdot 2. \end{aligned}$$

1677.

(1891, p. 4*.)

On considère les coniques inscrites dans un quadrilatère. Le lieu du second point de rencontre de chaque conique avec la droite joignant un sommet au point de contact avec un des côtés ne passant pas par ce sommet est une conique.

A. CAZAMIAN.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Prenons comme triangle de référence le triangle diagonal du quadrilatère. L'équation générale des coniques inscrites est

$$(1) \quad x^2 - \frac{a^2 y^2}{\rho} + \frac{b^2 z^2}{\rho - 1} = 0;$$

ρ étant un paramètre variable.

Les équations des côtés du quadrilatère sont

$$(2) \quad x + ay + bz = 0;$$

$$(3) \quad x - ay + bz = 0;$$

$$(4) \quad x + ay - bz = 0;$$

$$(5) \quad x - ay - bz = 0.$$

Les coordonnées du sommet intersection de (3) et (4) sont

$$0, \quad b, \quad a$$

et celles du point de contact de (2) avec la conique (1) sont

$$ab, \quad -b\rho, \quad a(\rho - 1).$$

Par suite, l'équation de la droite qui joint le sommet au point de contact est

$$(6) \quad (2\rho - 1)x + ay - bz = 0.$$

Pour avoir le lieu cherché il suffit d'éliminer le paramètre ρ entre les équations (1) et (6). Or de (6) on tire

$$\rho = \frac{x - ay + bz}{2x},$$

$$\rho - 1 = -\frac{x + ay - bz}{2x}.$$

En portant ces valeurs dans (1), on obtient pour l'équation du lieu cherché

$$x(x - ay + bz)(x + ay - bz) - 2a^2y^2(x + ay - bz) - 2b^2z^2(x - ay + bz) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(x + ay + bz)[x(x - ay - bz) - 2(ay - bz)^2] = 0.$$

Le lieu se compose donc de la droite (2) et d'une conique. Cette dernière est tangente à la diagonale $x = 0$ et à la droite (5) aux points où elles sont coupées par la droite

$$ay - bz = 0.$$

Cette droite passe par le point d'intersection des diagonales $y = 0$, $z = 0$ et des droites (3) et (4).

1816.

(1899, p. 148.)

On considère les pieds des quatre normales menées d'un point à une conique (C), et les quatre triangles T formés par les tangentes menées en ces points à C :

1° *A chaque triangle T on peut circoncrire une conique A ayant les mêmes axes de symétrie que C;*

2° *Les normales à la conique A aux sommets du triangle T sont concourantes en un point P;*

3° *De chaque point P on mène la quatrième normale à la conique A correspondante. Les quatre normales ainsi obtenues sont parallèles et leurs pieds sont en ligne droite.*

E. DUPORCQ.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Soit

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de la conique C. Désignons par M le point d'où l'on mène les normales; par A, B, C, D les pieds de ces normales; par x_0, y_0 les coordonnées de M; par x_1, y_1 celles

de A. On a d'abord les relations

$$(2) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$(3) \quad c^2 x_1 y_1 + b^2 y_0 x_1 - a^2 x_0 y_1 = 0,$$

qui expriment que le point A est à la fois sur la conique C et sur l'hyperbole d'Apollonius du point P.

Soient encore α et β les coordonnées du pôle de AB et α' et β' celles du pôle de CD. On sait qu'on a

$$\alpha\alpha' = -a^2, \quad \beta\beta' = -b^2,$$

et puisque le pôle de AB décrit la tangente en A, il en résulte

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} + \frac{\beta y_1}{b^2} - 1 = 0,$$

ou encore

$$\frac{x_1}{\alpha'} + \frac{y_1}{\beta'} + 1 = 0.$$

En remplaçant α' et β' par les coordonnées courantes x et y , on voit que les sommets du triangle T sont sur la conique

$$(4) \quad \frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y} + 1 = 0.$$

C'est une hyperbole équilatère passant à l'origine, ayant pour centre le point diamétralement opposé à A sur C et pour directions asymptotiques Ox et Oy.

Pour trouver d'autres coniques circonscrites à T, rappelons les formules de Desboves

$$x_0 = -\frac{c^2 x (y^2 - b^2)}{a^2 y^2 + b^2 x^2}, \quad y_0 = \frac{c^2 y (x^2 - a^2)}{a^2 y^2 + b^2 x^2}.$$

Grâce aux relations (3) et (4), elles s'écrivent, après quelques transformations et simplifications,

$$(5) \quad b^2 x_0 y_1 x^2 + b^2 y_0 x_1 y^2 - c^2 y_1^2 x y - b^2 c^2 y_1 x = 0,$$

$$(6) \quad a^2 x_0 y_1 x^2 + a^2 y_0 x_1 y^2 + c^2 x_1^2 x y + a^2 c^2 x_1 y = 0;$$

équations de deux coniques passant par les sommets de T. De (4) et (5) on déduit, toujours grâce aux relations (2)

et (3),

$$(7) \quad a^2 x_0 y_1 x^2 + b^2 y_0 x_1^2 x - a^2 y_0 x_1 y_1 y - a^2 c^2 x_1 y_1 = 0.$$

De même, de (4) et (6), on tire

$$(8) \quad b^2 y_0 x_1 y^2 - b^2 x_0 x_1 y_1 x + a^2 x_0 y_1^2 y + b^2 c^2 x_1 y_1 = 0.$$

Enfin, en combinant (7) et (8), on trouve

$$(9) \quad a^2 x_0^2 y_1^2 x^2 + b^2 y_0^2 x_1^2 y^2 - c^4 x_1^2 y_1^2 = 0;$$

c'est l'équation de la conique A.

En appelant (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') les coordonnées des sommets du triangle T, on obtient, grâce aux équations (4) et (5), les relations

$$(10) \quad x' x'' x''' = \frac{c^2 x_1^2}{x_0}, \quad y' y'' y''' = -\frac{c^2 y_1^2}{y_0}.$$

En appelant ξ et η les coordonnées du pied de la quatrième normale à la conique A, on trouve, au moyen de (4) et (9),

$$x' x'' x''' \xi = -\frac{c^4 x_1^4}{a^2 x_0^2}, \quad y' y'' y''' \eta = \frac{c^2 y_1^4}{b^2 y_0^2};$$

et, par suite,

$$(11) \quad \xi = -\frac{c^2 x_1^2}{a^2 x_0}, \quad \eta = \frac{c^2 y_1^2}{b^2 y_0}.$$

Les formules (10) et (11) permettent de résoudre les deux dernières parties de la question.

Observons que l'hyperbole équilatère (4) est une hyperbole d'Apollonius pour la conique (9) et que par suite les normales à cette dernière conique, aux sommets du triangle T, sont concourantes.

Les coordonnées du point de concours P sont

$$\alpha = \frac{a^2 x_0^2 y_1^2 - b^2 y_0^2 x_1^2}{b^2 y_0^2 x_1}, \quad \beta = -\frac{a^2 x_0^2 y_1^2 - b^2 y_0^2 x_1^2}{a^2 x_0^2 y_1}.$$

Le coefficient angulaire de la quatrième normale issue de P est égal à $\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}$. Après des réductions obtenues au moyen

(571)

de (3), on trouve

$$\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha} = -\frac{y_0}{x_0};$$

il est donc constant.

Des relations (11) on déduit

$$-\frac{x_0\xi}{c^2} + \frac{y_0\eta}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Les pieds des quatrièmes normales sont donc sur la droite

$$x_0\xi - y_0\eta + c^2 = 0.$$

1848.

(1900, p. 192.)

Si une cubique unicursale tritangente à une conique découpe sur chacune des tangentes aux trois points de contact un segment qui soit vu de l'un des foyers de la conique sous un angle droit, l'un des segments déterminés par cette cubique sur une tangente quelconque à la conique est vu du même foyer sous un angle droit.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Cette question avait été posée pour provoquer la recherche d'une démonstration directe du théorème qui en fait l'objet, lequel provient tout simplement de l'application de la transformation par polaires réciproques (dans le cas d'un cercle directeur) à un théorème de Laguerre sur les courbes unicursales de la troisième classe tritangentes à un cercle et tangentes, en outre, aux normales à ce cercle menées par les points de contact, théorème consistant en ce que deux des tangentes que, de chaque point de ce cercle, on peut mener à la courbe sont rectangulaires (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. VI, 1877, p. 56, et *Œuvres*, t. II, p. 478). On obtiendrait donc une démonstration de la proposition ci-dessus en transformant dualistiquement celle que Laguerre a donnée, à l'endroit cité, de son théorème. Nous laisserons au lecteur le soin d'effectuer cette transformation. Mais nous ajouterons ici quelques remarques à ce sujet.

Parmi les courbes unicursales de la troisième classe, une des

plus connues est l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, entièrement caractérisée, dans cette catégorie, par le fait qu'elle est *bitangente à la droite de l'infini avec les points cycliques comme points de contact*. Une telle courbe H est tritangente au cercle C qui passe par ses trois sommets, en même temps qu'aux normales à ce cercle, qui la touchent en ses points de rebroussement. Donc, en vertu du théorème de Laguerre ci-dessus rappelé, le cercle C est orthoptique pour l'hypocycloïde H, ainsi d'ailleurs que cela a, depuis longtemps, été remarqué par Steiner.

Appliquons la transformation par polaires réciproques à ce cas. La polaire réciproque de H sera une cubique unicursale Γ admettant pour point double isolé le centre de la transformation, où les tangentes (polaires des points cycliques) seront les droites isotropes. Cette courbe Γ sera donc ce que Salmon appelle une cubique *acnodale*, dont le point double isolé sera en même temps pour elle un foyer F. Au cercle C correspondra une conique γ ayant aussi pour foyer le centre F de la transformation et qui sera tritangente à Γ . Les tangentes aux trois points de contact de H et de C formant un triangle équilatéral, les trois points de contact de Γ et de γ seront situés sur des rayons vecteurs, issus de F, à 120° les uns sur les autres. Aux normales à C qui passent par ses points de contact avec H, c'est-à-dire aux droites unissant ces points de contact au centre de C, correspondent les points situés à la rencontre des tangentes communes à Γ et γ et de la directrice δ de γ répondant au foyer F. Et comme, sur la première figure, ces trois normales sont pour H des tangentes de rebroussement, sur la seconde, les points correspondants seront pour Γ des points d'inflexion. Finalement on obtient ce théorème :

Si le point double isolé d'une cubique acnodale Γ est en même temps pour cette courbe un foyer F, il existe une conique γ de foyer F tritangente à Γ , et l'un des segments déterminés par Γ sur chaque tangente de γ est vu de F sous un angle droit. D'ailleurs, les distances mutuelles des points de contact de Γ et γ sont vues de F sous des angles de 120° et les points d'inflexion de Γ sont à la rencontre des tangentes en ces points de contact et de la directrice δ de γ répondant au foyer F.

1873.

(1900, p. 432.)

On considère une ellipse E et un cercle C concentrique à E . Si cette ellipse, entraînant avec elle le cercle C , se déplace de façon à être constamment tangente à une droite fixe en un point donné, les courbes engendrées par les divers points du cercle C ont toutes même aire.

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Un point, invariablement lié à E et entraîné dans son déplacement, engendre une courbe, appelée *glissette*, qui est identique à la roulette que décrit le point, considéré comme invariablement lié à la développée de E , lorsque cette développée roule sur la normale à la droite fixe au point fixe (voir *Nouv. Ann.*, 1915, p. 270).

D'autre part, d'après un théorème classique, la surface d'une roulette à base rectiligne est double de la surface de la podaire correspondante.

Enfin l'on sait que, si l'on appelle S_0 l'aire de la podaire d'une courbe par rapport à un point O de son plan, et S l'aire de la podaire par rapport à un autre point P , on a

$$S = S_0 + \frac{\pi}{2} \overline{PO}^2.$$

De tout cela il résulte bien que les courbes engendrées par les divers points de C ont même aire et que cette aire commune est égale à celle de la courbe décrite par le centre de E , augmentée de l'aire du cercle C .

2118.

(1909, p. 100.)

L'équation

$$x = e \sin(m + x) = 0$$

peut s'écrire

$$\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) = \frac{\rho + e}{\rho - e} \operatorname{tang} \frac{m}{2},$$

ou

$$\rho = \frac{x}{\sin x}.$$

Construire le lieu de l'intersection des droites menées par les extrémités A et B, du segment $AB = e$, et faisant avec ce segment respectivement les angles m et $m + x$.

A. PELLET.

SOLUTION

Par M. VAULOT.

L'équation donnée peut s'écrire successivement

$$\frac{x}{e} = \sin(m+x) = \sin\left(x + \frac{m}{2}\right) \cos \frac{m}{2} + \sin \frac{m}{2} \cos\left(x + \frac{m}{2}\right),$$

$$\frac{x}{e \cos\left(x + \frac{m}{2}\right) \cos \frac{m}{2}} = \operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) + \operatorname{tang} \frac{m}{2},$$

$$\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) = \operatorname{tang} \frac{m}{2} \left[\frac{x}{e \cos\left(x + \frac{m}{2}\right) \sin \frac{m}{2}} - 1 \right]$$

$$= \operatorname{tang} \frac{m}{2} \left[\frac{2x}{e \sin(m+x) - e \sin x} - 1 \right]$$

$$= \operatorname{tang} \frac{m}{2} \left[\frac{2x}{x - e \sin x} - 1 \right]$$

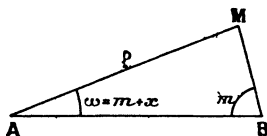
$$= \operatorname{tang} \frac{m}{2} \frac{x + e \sin x}{x - e \sin x}$$

$$= \operatorname{tang} \frac{m}{2} \frac{\frac{x}{\sin x} + e}{\frac{x}{\sin x} - e}$$

$$= \operatorname{tang} \frac{m}{2} \frac{\rho + \varepsilon}{\rho - \varepsilon}.$$

Pour construire le lieu demandé, je vais chercher son

Fig. 1.



équation en coordonnées polaires, le rayon vecteur d'un

point M du lieu étant $AM = \rho$ et son angle polaire

$$MAB = \omega = m + x.$$

On a les équations

$$\begin{aligned} x &= e \sin(m + x), \\ \rho &= \frac{e \sin m}{\sin(2m + x)}, \\ \omega &= m + x. \end{aligned}$$

En éliminant m et x on tire l'équation de la courbe qui est

$$\rho = \frac{e \sin(2\omega - e \sin \omega)}{\sin(2\omega - e \sin \omega)}.$$

Pour la construire je remarque qu'il suffit, pour avoir toute la courbe, de faire varier ω dans un intervalle de 2π . Comme ρ reste le même quand on change ω en $-\omega$, nous allons faire varier ω de 0 à π et prendre la partie symétrique par rapport à AB.

Remarquons tout de suite que, pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, ρ se présente sous des formes indéterminées. On trouve sans difficulté que les valeurs limites de ρ pour ces valeurs de ω sont :

pour $\omega = 0$,

$$\rho_0 = \frac{e(1 - e)}{2 - e},$$

pour $\omega = \pi$,

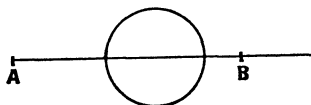
$$\rho_\pi = \frac{e(1 + e)}{2 + e}.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas suivant que les termes de la fraction qui donne ρ s'annulent ou ne s'annulent pas.

Premier cas : $e < 1$. — ρ ne s'annule ni ne devient infini. On a

$$\rho_0 < \rho_\pi < e.$$

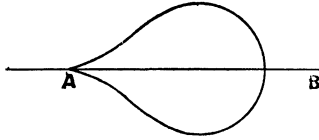
Fig. 2.



La courbe a la forme indiquée par la figure 2.

Deuxième cas : $e = 1$. — L'origine est un point de rebrous-

Fig. 3.



sement et l'on a

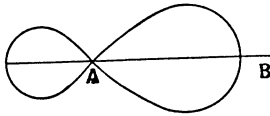
$$\rho\pi = \frac{e}{2}.$$

Troisième cas : $1 < e < 2$. — On a

$$\rho_0 < 0, \quad 0 < \rho\pi < e.$$

L'origine est un point double, et l'on a la forme de courbe représentée par la figure 4.

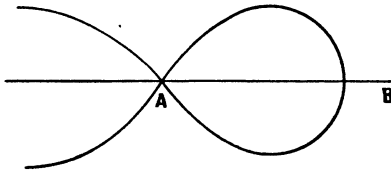
Fig. 4.



Quatrième cas : $e = 2$. — On a

$$\rho\pi = \frac{3e}{3}.$$

Fig. 5.



En cherchant la limite de ρ pour $\omega = 0$, on trouve que

(577)

ρ tend vers l'infini. En cherchant la limite de $\rho \sin \omega$, on voit que cette limite est l'infini. Il y a donc deux branches paraboliques (fig. 5).

Cinquième cas : $e > 2$. — Ce cas peut présenter de grandes différences. ρ s'annule quand on a

$$\omega - e \sin \omega = K\pi,$$

et devient infini quand on a

$$2\omega - e \sin \omega = K\pi.$$

Le nombre des valeurs qui annulent ρ et de celles qui le rendent infini tendent l'un et l'autre vers l'infini quand e augmente indéfiniment.

2214.

(1914, p. 95.)

Démontrer l'identité suivante, où p est entier et m quelconque

$$\begin{aligned} & \left[\frac{x^p}{m} + \frac{p x^{p-1}(1+x)}{m(m-1)} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{p(p-1)\dots 1 \cdot (1+x)^p}{m(m-1)\dots(m-p)} \right] \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{p!} \\ & = 1 + A_1 x + \dots + A_p x^p, \end{aligned}$$

avec

$$A_1 = \frac{m'}{1}, \quad A_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \quad \dots$$

Pour m entier et $p \geq m$, il faut faire entrer le facteur $m - m$ dans la parenthèse, simplifier comme si ce facteur n'était pas nul, et faire ensuite $m - m = 0$.

Quel résultat obtient-on en supposant que m , d'abord quelconque, tend vers le nombre entier u , avec $p \geq u$?

G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

L'identité est égale à

$$\begin{aligned}
 (I) \quad (1+x)^p + \frac{m-p}{1} (1+x)^{p-1} x \\
 + \frac{(m-p)(m-p+1)}{2!} (1+x)^{p-2} x^2 + \dots \\
 + \frac{(m-p)(m-p+1)\dots(m-2)}{(p-1)!} (1+x) x^{p-1} \\
 + \frac{(m-p)(m-p+1)\dots(m-1)}{p!} x^p \\
 = 1 + A_1 x + \dots + A_p x^p.
 \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de x^n , on arrive à avoir l'identité

$$\begin{aligned}
 p(p-1)\dots(p-n+1) + C_n^1 q(p-1)\dots(p-n+1) \\
 + C_n^2 q(q+1)\dots(p-2)\dots(p-n+1) + \dots \\
 + C_n^{n-1} q(q+1)\dots(q+n-2)(p-n+1) \\
 + C_n^n q(q+1)\dots(q+n-1) \\
 = (p+q)(p+q-1)\dots(p+q-n+1),
 \end{aligned}$$

où

$$m-p = q.$$

Or, ceci est évident; on le vérifie en posant dans le premier membre

$$q = -p, \quad -p+1, \quad -p+2, \quad \dots, \quad -p+n-1.$$

On peut faire aussi la remarque suivante :

Le premier membre de (I) est égal au coefficient de z^p du produit de deux expressions

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-(1+x)z} = 1 + (1+x)z + \dots + (1+x)^p z^p + \dots; \\
 \frac{1}{(1-xz)^{m-p}} = 1 + \frac{m-p}{1} xz + \dots \\
 + \frac{(m-p)\dots(m-1)}{p!} x^p z^p + \dots
 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - (1+x)z} \frac{1}{(1-xz)^{m-p}} \\ &= \frac{1}{(1-xz)^{m-p+1}} \frac{1}{1 - \frac{z}{1-xz}} \\ &= \frac{1}{(1-xz)^{m-p+1}} + \frac{z}{(1-xz)^{m-p+2}} + \dots \\ &+ \frac{z^{p-1}}{(1-xz)^m} + \frac{z^p}{(1-xz)^{m+1}} + \dots; \end{aligned}$$

alors le coefficient de z^p est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{(m-p+1) \dots (m-1)m}{p!} x^p + \dots \\ &+ \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m}{1} x + 1. \end{aligned}$$

N. B. — Dans l'identité (I) on n'a pas besoin de distinguer les cas où m est entier ou non.

2219.

(1914, p. 144.)

Une hypocycloïde (H) et une épicycloïde (E) à trois rebroussements ont les mêmes points de rebroussements : démontrer que la tangente de (H) en un point quelconque A coupe (E) en deux points réels B et B' dont la distance est constante; les milieux AB et AB' appartiennent à (H); les normales en B et B' à (E) sont rectangulaires et se coupent sur les cercles des rebroussements; les tangentes en ces points se coupent sur le cercle des sommets de (E); le cercle de diamètre BB' touche les deux cercles précédents.

J. LEMAIRE.

SOLUTIONPar M^{lle} ANNE DE PRÉHYR.

Soient :

O le centre d'une circonférence de rayon R;
 CC' un diamètre quelconque de cette circonférence;
 C₁ et C'₁, C₂ et C'₂ les centres de circonférences de même rayon $\frac{R}{3}$, tangentes extérieurement ou intérieurement à O en C et C';

BB' une parallèle quelconque à CC' allant de la circonférence C_1 à la circonférence C'_1 , avec $BB' = C_1 C'_1 = \frac{8R}{3}$;

D et D' les points où BB' coupe les circonférences C_2, C'_2 avec arc CB = arc CD et arc C'B' = arc C'D' ;

E le point de la circonférence O où se coupent les droites BC, B'C' ;

A la projection de E sur BB', G la projection de E sur CC' ;

E' le point où EA rencontre encore la circonférence O ;

F le point où OE' coupe BB'.

Ayant $OF : OE' = GA : AE' = CA : GE = BC : CD = 1 : 3$, la circonférence de diamètre FE' passe en A et a $\frac{R}{3}$ pour rayon.

D'autre part, des angles égaux en F, O et C_1 donnent

$$\text{arc}AE' + \text{arc}CB = \text{arc}CE',$$

et les notations définies ci-dessus se confondent avec celles de l'énoncé.

On a déjà $BB' = \frac{8R}{3} = \text{const.}$, et les normales en B et B' à (H) se coupent à angle droit en E sur le cercle des rebroussements O.

Les tangentes en B et B' à (H) achèvent le rectangle BEB'L ; L est sur AO et l'on a immédiatement $OL = \frac{5R}{3}$, ce qui justifie le lieu indiqué pour L et les propriétés de la circonférence de diamètre BB'.

Il reste à démontrer que $AD = DB$. Or si K est la projection de C sur BD, on a

$$BD = 2BK = 2BA \frac{BC}{BE} = 2BA \frac{1}{4} = \frac{1}{2} BA.$$

C. Q. F. T.

